INTEGRALI

INTEGRALI SECONDO RIEMANN

Si definisce **partizione** $P=\{x_k\}_{k=0}^{N}$ di un intervallo $[a,b]$ una qualunque successione monotona crescente ($x_k > x_{k-1} \quad \forall k$) che ha come valore di partenza $x_0 = a$ e come valore di arrivo $x_N = b$.

Indichiamo con $\mathscr{P}$ l'insieme di tutte le possibili partizioni dell'intervallo $[a,b]$.

Sia $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ una qualunque funzione, ci poniamo il problema di misurare l'area sottesa dalla funzione rappresentata nel piano cartesiano. Usando la partizione P si ottiene la divisione dell'intervallo $[a,b]$ in N intervalli contigui $I_i=[x_{i-1},x_i]$ ciascuno di lunghezza $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$. Se la funzione f è limitata in $[a,b]$, allora su ciascun intervallo la funzione ammette estremi superiore $M_i=\sup\limits_{x\in I_i} f(x)$ ed inferiore $m_i=\inf\limits_{x\in I_i} f(x)$

Si definiscono:

- **Somma superiore** associata ad una partizione P: $\quad S(f,P)=\sum_{i=1}^{N} M_i\,\Delta x_i$.
- **Somma inferiore** associata ad una partizione P: $\quad s(f,P)=\sum_{i=1}^{N} m_i\,\Delta x_i$.
- **somma integrale superiore** come $S(f)=\inf\limits_{P\in\mathscr{P}} S(f,P)$.
- **somma integrale inferiore** $s(f)=\sup\limits_{P\in\mathscr{P}} s(f,P)$.

DEFINIZIONE DI INTEGRABILITA' SECONDO RIEMANN:

Una funzione funzione si dice **integrabile secondo Riemann** se $s(f)=S(f)$, e l'integrale di Riemann della funzione $f(x)$ sull'intervallo $[a,b]$ vale $\int_a^b f(x)dx = s(f)=S(f)$.

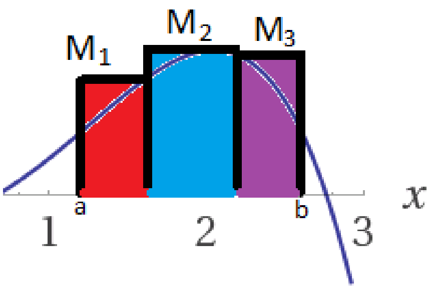
Il simbolo dell'integrale $\int$ può essere interpretato come una sommatoria di un numero indefinito di termini, mentre il dx (**differenziale**) rappresenta l'ampiezza di un intervallo indefinitamente piccolo.

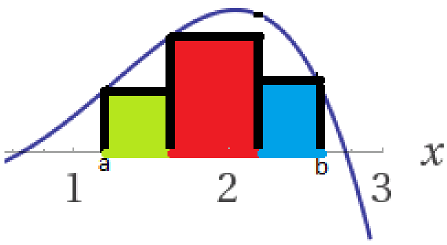
Una definizione più formale di integrabilità secondo Riemann è la seguente:

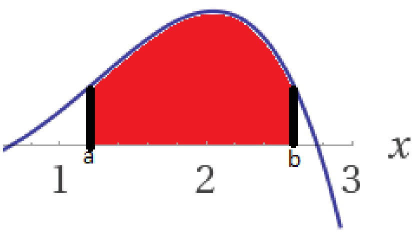
Definizione: una funzione si dice Riemann integrabile nell'intervallo $[a,b]$ se per ogni $\varepsilon>0$ esiste una partizione P tale che $|S(f,P)-s(f,P)|<\varepsilon$.

INTERPRETAZIONE GEOMETRICA

Sia $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ una funzione rappresentata nel piano cartesiano. Scelta una partizione P dell'intervallo $[a,b]$, si ottiene una divisione dello stesso in N sottointervalli. Su ciascuno di essi si prende il valore massimo M_k e il valore minimo m_k che la funzione assume. I termini della sommatoria $S(f,P)=\sum_{i=1}^{N} M_i\,\Delta x_i$ geometricamente forniscono l'area di rettangoli di base Δx_i e altezza M_i. I termini della sommatoria $s(f,P)=\sum_{i=1}^{N} m_i\,\Delta x_i$ geometricamente forniscono l'area di rettangoli di base Δx_i e altezza m_i. In entrambi i casi, se la funzione è positiva sull'intervallo $[a,b]$, si ottiene un approssimazione dell'area sottesa dalla funzione nell'intervallo $[a,b]$ che è tanto più buona, quanto più fine si sceglie la partizione.







Vediamo un esempio di integrale calcolato attraverso la definizione.

Vogliamo calcolare $\int_0^1 e^x dx$.

Prendiamo una possibile partizione dell'intervallo $[0,1]$, $P=\left\{x_k=\frac{k}{N}\right\}_{k=0}^{N}$. Con tale scelta della partizione gli intervalli hanno tutti la stessa lunghezza $\Delta x=\Delta x_i=\frac{1}{N}$.

Gli intervalli sono dati da $I_k=\left[\frac{k}{N},\frac{k+1}{N}\right]$, con $k=0,..,N-1$. $M_k=\sup_{x\in I_i} e^x=e^{\frac{k+1}{M}}$, $m_k=\inf_{x\in I_i} e^x=e^{\frac{k}{M}}$

$$s(f,P)=\sum_k m_k\,\Delta x_k=\sum_{k=0}^{N-1} e^{\frac{k}{N}}\frac{1}{N}=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\left(e^{\frac{1}{N}}\right)^k=\frac{1}{N}\frac{1-e^{\frac{N}{N}}}{1-e^{\frac{1}{N}}}$$

$$s(f)=\sup_{P\in\mathscr{P}} s(f,P)=\lim_{N\to\infty}\frac{1-e^{\frac{N}{N}}}{\frac{1-e^{\frac{1}{N}}}{\frac{1}{N}}}=\frac{1-e}{-1}=e-1$$

$$S(f,P)=\sum_k M_k\,\Delta x_k=\sum_{k=0}^{N-1} e^{\frac{k+1}{N}}\frac{1}{N}=\frac{e^{\frac{1}{N}}}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\left(e^{\frac{1}{N}}\right)^k=\frac{e^{\frac{1}{N}}}{N}\frac{1-e^{\frac{N}{N}}}{1-e^{\frac{1}{N}}}$$

$$S(f)=\inf_{P\in\mathscr{P}} S(f,P)=\lim_{N\to\infty}e^{\frac{1}{N}}\frac{1-e^{\frac{N}{N}}}{\frac{1-e^{\frac{1}{N}}}{\frac{1}{N}}}=\frac{1-e}{-1}=e-1$$

Poiché integrale superiore ed inferiore coincidono l'integrale di Riemann sull'intervallo $[0,1]$ di e^x è dato da: $\int_0^1 e^x dx=e-1$

FUNZIONI RIEMANN INTEGRABILI

A questo punto poniamoci il problema di definire funzioni integrabili. Vediamo quali sono le classi di funzioni integrabili secondo Riemann nell'intervallo $[a,b]$ che indicheremo con il simbolo $\Re([a,b])$ Si potrebbe pensare che è sufficiente la limitatezza della funzione sull'intervallo di integrazione, ma non è così. Un esempio di funzione limitata ma non integrabile è la funzione di Dirichlet definita da:

$$f:[0,1]\to\mathbb{R}\quad \text{con}\quad f(x)=\begin{cases}1, & x\in\mathbb{Q}\cap[0,1]\\ 0, & x\notin\mathbb{Q}\cap[0,1]\end{cases}$$

La **funzione di Dirichlet** presenta un numero infinito di discontinuità nell'intervallo $[0,1]$. L'insieme dei numeri razionali è un insieme denso in $\mathbb{R}$ e quindi comunque si sceglie una partizione P dell'intervallo $[0,1]$, su ciascun intervallo I_k saranno presenti infiniti numeri razionali e infiniti numeri irrazionali. E quindi si avrà che $M_k=\sup_{x\in I_i} f(x)=1$, $m_k=\inf_{x\in I_i} f(x)=0$, e quindi:

$$s(f,P)=\sum_k m_k\,\Delta x_k=0\quad \forall P\in\mathscr{P}\quad\Rightarrow\quad s(f)=0$$

$$S(f,P)=\sum_k M_k\,\Delta x_k=\sum_k \Delta x_k=1 \quad \forall P\in\mathscr{P} \quad \Rightarrow \quad S(f)=1$$

Poiché $s(f)\neq S(f)$ allora la funzione di Dirichlet non è Riemann integrabile.

A questo punto poniamoci il problema di delle classi di funzioni integrabili secondo Riemann (condizioni sufficienti per l'integrabilità).

INTEGRABILITÀ DI FUNZIONI LIMITATE

Sono qui elencate due condizioni sufficienti ma non necessarie perché una funzione risulti Riemann integrabile.

1. Una funzione limitata nell'intervallo $[a,b]$ è integrabile se la funzione è monotona.
2. Una funzione limitata nell'intervallo $[a,b]$ è integrabile se la funzione è continua a tratti (presenta un numero finito di discontinuità a salto).

Dimostrazione dell'integrabilità di funzioni continue

Dimostriamo adesso che se una funzione è continua in $[a,b]$ allora è integrabile. A tale scopo è necessario preventivamente definire alcuni nuovi concetti.

Uniformemente continua: una funzione continua si dice uniformemente continua in un intervallo $I\subseteq\mathbb{R}$ se per ogni $\varepsilon>0$, esiste un $\delta(\varepsilon)>0$ tale che $\forall x_1,x_2\in I$, si ha che se

$$|x_2-x_1|<\delta \;\Rightarrow\; |f(x_2)-f(x_1)|<\varepsilon$$

Esempi:

1. Dimostrare che la funzione $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ con $f(x)=x^2$ non è uniformemente continua.

   Siano x_1 e x_2 una coppia di valori tali che $|x_2-x_1|<\delta$, si ha che f è uniformemente continua se $|f(x_1)-f(x_2)|<\varepsilon$ ovvero $|x_2{}^2-x_1{}^2|<\varepsilon$ e δ dipende solo dalla scelta di ε e non da x_1 e x_2.

   Poniamo $x_2=x_1+h$ con $h<\delta$:

   $$|x_2{}^2-x_1{}^2|=|(x_1+h)^2-x_1{}^2|=|2x_1h+h^2|<\varepsilon$$

   Si ha che δ non può essere indipendente da x_1 , in quanto comunque fissata h

   $$\lim_{x_1\to\infty}|2x_1h+h^2|=+\infty$$

2. Dimostrare che la funzione $f:\{x>0\}\to\mathbb{R}$ con $f(x)=\frac{1}{x}$ non è uniformemente continua.

Siano x_1 e x_2 una coppia di valori tali che $|x_2 - x_1| < \delta$, si ha che f è uniformemente continua se $|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$ ovvero $\left|\frac{1}{x_2} - \frac{1}{x_1}\right| < \varepsilon$ e δ dipende solo dalla scelta di ε e non da x_1 e x_2.

Poniamo $x_2 = x_1 + h$ con $h < \delta$:

$$\left|\frac{1}{x_2} - \frac{1}{x_1}\right| = \left|\frac{1}{x_1 + h} - \frac{1}{x_1}\right| = \left|\frac{h}{(x_1 + h)x_1}\right| < \varepsilon$$

Si ha che δ non può essere indipendente da x_1 x_1 , in quanto comunque fissata h

$$\lim_{x_1 \to 0}\left|\frac{h}{(x_1 + h)x_1}\right| = +\infty$$

3. Dimostrare che la funzione $f : \{x \le a\} \to \mathbb{R}$ con $f(x) = e^x$ è uniformemente continua comunque scelta $a \in \mathbb{R}$.

   Siano x_1 e x_2 una coppia di valori tali che $|x_2 - x_1| < \delta$, si ha che f è uniformemente continua se $|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$ ovvero $|e^{x_2} - e^{x_1}| < \varepsilon$ e δ dipende solo dalla scelta di ε e non da x_1 e x_2.

   Poniamo $x_2 = x_1 + h$ con $h < \delta$:

   $$|e^{x_2} - e^{x_1}| = |e^{x_1 + h} - e^{x_1}| = e^{x_1}|e^h - 1|$$

   A questo punto possiamo sfruttare la monotonia della funzione e^x per scrivere:

   $$e^{x_1}|e^h - 1| \le e^a|e^h - 1| \le e^a|e^\delta - 1|$$

   E arrivati a questo punto abbiamo dimostrato che ε e δ non dipendono da x_1.

Vediamo ora delle condizioni sufficienti alla continuità uniforme.

Teorema di Cantor

Se f è una funzione continua in un compatto $[a,b]$ allora f è uniformemente continua nello stesso intervallo.

Dimostrazione per assurdo

Partiamo dal riscrivere il teorema in maniera formale:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : \forall x, x' \in [a,b], |x - x'| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x')| < \varepsilon$$

Vogliamo dimostrare per assurdo il teorema, quindi partiamo dal negare la tesi. Per fare ciò possiamo scrivere che esiste un valore di $\varepsilon = \varepsilon_0 > 0$ in corrisponde del quale $\forall \delta > 0$ $\exists x, x' \in [a,b]$ tali che se $|x - x'| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x')| > \varepsilon_0$

Poniamo ora $\delta = \frac{1}{n}$ con $n \in \mathbb{N}$.

Allora in corrispondenza di $\varepsilon = \varepsilon_0$ si deve avere che $\forall n \in \mathbb{N} \quad \exists x_n, x_n' \in [a,b]$ tali che

$$|x_n - x_n'| < \frac{1}{n} \Rightarrow |f(x_n) - f(x_n')| > \varepsilon_0$$

Abbiamo così definito una successione x_n per la quale vale il teorema di Bolzano Weierstress e pertanto esiste una sua estratta x_{n_k} che converge a un punto $x_0 \in [a,b]$

Si ha che poiché $|x_n - x_n'| < \frac{1}{n}$, allora $x_{n_k} - \frac{1}{n} < x_{n_k}' < x_{n_k} + \frac{1}{n}$ e quindi per il teorema dei carabinieri anche x_{n_k}' converge a x_0 e quindi essendo $f(x)$ continua la successione $\lim_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = f(x_0)$

$|f(x_{n_k}) - f(x_{n_k}')| \to |f(x_0) - f(x_0)| = 0$. Questo implica che $\varepsilon_0 = 0$ e quindi non esiste un valore di $\varepsilon_0 > 0$ che permette di negare la tesi e quindi è assurdo.

Funzioni Lipchitziane

Una funzione si dice Lipchitziana se esiste una costante $L > 0$ tale che $\forall x_1, x_2 \in I$

$$|f(x_2) - f(x_1)| \le L|x_2 - x_1|$$

Caratterizzazione di funzioni Lipchitziane: Se una funzione derivabile nell'intervallo I è Lipchitziana di costante L nell'intervallo I se e solo se $|f'(x)| \le L \quad \forall x \in I$.

Dimostrazione:

Partiamo dal dimostrare che se $|f'(x)| \le L \quad \forall x \in I$ allora f è Lipchitziana.

Vale il teorema di Lagrange in I quindi comunque scelti $x_2, x_1 \in I$ con $x_2 > x_1$, $\exists x_0 \in [x_1, x_2]$ tale che

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(x_0)(x_2 - x_1) \le L|x_2 - x_1| \ .$$

Dimostriamo ora che se f è Lipchitziana allora $|f'(x)| \le L \quad \forall x \in I$.

Poniamo $x_2 = x_1 + h$, con $h > 0$, si ha che se f è Lipchitziana allora $\forall x_1, h > 0$

$$f(x_2) - f(x_1) = f(x_1 + h) - f(x_1) \le L|x_2 - x_1| = Lh$$

Dividendo entrambi i membri per h si ha che $\frac{f(x_1+h) - f(x_1)}{h} \le L$ e al limite si ha che

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_1+h) - f(x_1)}{h} = f'(x_1) \le L$$

Lipchitziana $\Rightarrow$ uniformemente continua. Se una funzione è Lipchitziana allora è uniformemente continua ma non è detto il vice versa (condizione sufficiente ma non necessaria).

A questo punto andiamo a dimostrare che la continuità su un intervallo chiuso e limitato $[a,b]$ di una funzione $f(x)$ implica l'integrabilità secondo Riemann sullo stesso intervallo.

Dimostrazione

Per il teorema di Cantor la funzione $f(x)$ è uniformemente continua su tale intervallo, e quindi per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un $\delta > 0$ tale che

$$|f(x) - f(x')| < \frac{\varepsilon}{b-a}$$

Per ogni coppia $x, x' \in [a,b]$ tali che $|x - x'| < \delta$. Sia P una partizione di $[a,b]$, $P = \{x_0, x_1, .., x_N\}$ dove $x_0 = a$ e $x_N = b$ tale che $|x_k - x_{k-1}| < \delta \quad \forall k$, allora posti:

$$m_k = \inf_{x \in [x_{k-1}, x_k]} f(x) = \min_{x \in [x_{k-1}, x_k]} f(x)$$ (teorema di Weierstress)

$$M_k = \sup_{x \in [x_{k-1}, x_k]} f(x) = \max_{x \in [x_{k-1}, x_k]} f(x)$$ (teorema di Weierstress)

Essendo la funzione uniformemente continua si avrà che

$$M_k - m_k < \frac{\varepsilon}{b-a}$$

E perciò:

$$S(P) - s(p) = \sum_k (M_k - m_k)(x_k - x_{k-1}) \leq \frac{\varepsilon}{b-a} \sum_k (x_k - x_{k-1}) = \varepsilon$$

Quest'ultima coincide con la definizione di integrabile secondo Riemann.

La limitatezza non è una condizione necessaria all'integrabilità. Riferendoci al significato geometrico di integrale si ha infatti che se la funzione integranda risultasse illimitata nell'intervallo di integrazione e/o l'intervallo di integrazione risultasse illimitato, allora potrebbe essere illimitata anche l'area sottesa dal grafico della funzione. In tal caso le somme integrali non convergono e quindi la funzione non è Riemann integrabile.

INTEGRABILITÀ DI FUNZIONI ILLIMITATE

Prendiamo in esame una funzione continua in (a,b) e tale che $\lim_{x \to a^+} f(x) = \pm\infty$ oppure $\lim_{x \to b^-} f(x) = \pm\infty$.

Nel primo caso poniamo $x_0 = a^+$ e nel secondo caso poniamo invece $x_0 = b^-$.

Criterio di integrabilità: La funzione $f(x)$ è integrabile nell'intervallo $[a,b]$ se e solo se risulta asintoticamente equivalente per $x \to x_0$ ad un'altra funzione $g(x)$ integrabile nello stesso intervallo ($f(x) \sim g(x)$).

Questo criterio permette di confrontare la funzione $f(x)$ della quale si vuole capire se risulta integrabile su un certo intervallo con una funzione della quale l'integrabilità è nota. Tipicamente si utilizza

$g(x) = \dfrac{1}{(x - x_0)^{\alpha}}$ che risulta integrabile se e solo se $\alpha < 1$

INTEGRABILITÀ DI FUNZIONI LIMITATE SU INTERVALLI ILLIMITATI

Prendiamo in esame una funzione continua in $[a, +\infty)$ e tale che $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$, con $f(x) > 0$.
L'intervallo di integrazione è illimitato, ma non è detto che lo sia l'area sottesa dalla funzione in suddetto intervallo. $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ è integrabile se il risultato di questo integrale è un valore finito.

Criterio di integrabilità: La funzione $f(x)$ è integrabile nell'intervallo $[a, +\infty)$ se e solo se risulta asintoticamente equivalente per $x \to +\infty$ ad un'altra funzione $g(x)$ integrabile nello stesso intervallo ($f(x) \sim g(x)$).

Questo criterio permette di confrontare la funzione $f(x)$ della quale si vuole capire se risulta integrabile o meno con una funzione della quale l'integrabilità è nota. Tipicamente si utilizza

$g(x) = \dfrac{1}{x^{\alpha}}$.

L'integrale $\int_b^{+\infty} \dfrac{1}{x^{\alpha}}\,dx$, con $b > 0$ risulta convergente se $\alpha > 1$

CALCOLO DI INTEGRALI DI FUNZIONI CONTINUE

Finora ci siamo occupati di definire i concetti di **integrale** e **integrabile**, abbiamo visto come in alcuni casi particolarmente semplici è possibile calcolare integrali passando direttamente dalla definizione e abbiamo discusso di alcune classi di funzioni integrabili. Adesso invece ci occupiamo del calcolo esplicito di integrali che in generale è un problema molto complesso. In generale la soluzione di integrali di funzioni qualunque può essere effettuato per via numerica attraverso approssimazioni che esula dagli obbiettivi dell'esame di analisi. Esiste pertanto una classe di funzioni per le quali è possibile risolvere il problema in forma chiusa (calcolare il risultato esatto). Queste funzioni sono le funzioni continue per le quali vale il **teorema fondamentale del calcolo integrale** secondo il quale non è necessario sapere come si comporta la funzione nell'intervallo di integrazione, ma è sufficiente conoscere gli estremi di integrazione e essere abili a individuare una funzione $G(x)$ detta **primitiva** della funzione integranda $f(x)$. Una primitiva $G(x)$ è una qualunque funzione che derivata restituisce la funzione integranda $G'(x)=f(x)$.

Prima di procedere definiamo la funzione integrale come $F(x)=\int_a^x f(t)dt$

TEOREMA FONDAMENTALE DEL CALCOLO INTEGRALE

Sia $f(x)$ una funzione continua nell'intervallo $[a,b]$, la funzione integrale $F(x)=\int_a^x f(t)dt$ è una derivabile ed è una primitiva della funzione integranda $f(x)$, quindi la sua derivata vale $F'(x)=f(x)$.

Prima di passare alla dimostrazione del teorema fondamentale bisogna prima dimostrare il teorema della media.

Teorema della media

Sia f una funzione continua nell'intervallo $[a,b]$ allora esiste un punto $x_0\in[a,b]$ tale che $\int_a^b f(x)dx=f(x_0)(b-a)$.

Dimostrazione.

Sia $P=\{a,b\}$, la partizione più banale dell'intervallo $[a,b]$, $m=\min_{x\in[a,b]} f(x)=\inf_{x\in[a,b]} f(x)$ e $M=\max_{x\in[a,b]} f(x)=\sup_{x\in[a,b]} f(x)$, l'esistenza e la coincidenza con gli estremi di massimo e minimo sono assicurati dalla limitatezza e chiusura dell'insieme di base e dalla continuità della funzione.

Scelta tale partizione possiamo scrivere:

$$m(b-a)\le\int_a^b f(x)dx\le M(b-a)\ \Rightarrow\ m\le\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx\le M\ .$$

Questo significa che $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$ è un numero compreso tra il minimo ed il massimo della funzione $f(x)$ e per il teorema dei valori intermedi possiamo dire che $f(x)$ assume tutti i valori compresi tra m e M e quindi esiste $x_0\in[a,b]$ tale che $x_0=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$

Dimostrazione del teorema fondamentale.

Partiamo dalla definizione di funzione integrale

$$F(x)=\int_a^x f(t)dt$$

Per la proprietà di additività dell'integrale si ha:

$$F(x+\Delta x)=\int_a^{x+\Delta x} f(t)\,dt=\int_a^x f(t)\,dt+\int_x^{x+\Delta x} f(t)\,dt$$

Facciamo la differenza tra i due valori delle funzioni integrali appena ottenuti e dividiamo per Δx in modo da ottenere un rapporto incrementale della funzione $F(x)$

$$\frac{F(x+\Delta x)-F(x)}{\Delta x}=\frac{1}{\Delta x}\int_x^{x+\Delta x} f(t)\,dt$$

Per il teorema della media esiste un valore x_0 dipendente da Δx tale che $x<x_0<x+\Delta x$ e

$$f(x_0)=\frac{1}{\Delta x}\int_x^{x+\Delta x} f(t)\,dt$$

Per il teorema dei carabinieri se $\Delta x\to 0$ anche $x_0\to x$ e quindi essendo f continua si ha che $\lim_{\Delta x\to 0} f(x_0)=f(x)$, e quindi facendo tendere a zero Δx entrambi i membri dell'equazione si ha che

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{F(x+\Delta x)-F(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\Delta x}\int_x^{x+\Delta x} f(t)\,dt \;\Rightarrow\; F'(x)=f(x)$$

Primitive di una funzione

L'insieme di tutte e sole le primitive di una funzione $f(x)$ è dato da $G(x)=F(x)+c$ con $c\in\mathbb{R}$.

Dimostrazione

Se $F(x)$ è una primitiva anche $G(x)=F(x)+c$ lo è. Infatti $G'(x)=F'(x)=f(x)$ essendo nulla la derivata di una costante.

Non ci sono primitive diverse da $G(x)$. Infatti se $G_1(x)$ e $G_2(x)$ sono due primitive di $f(x)$ allora $\left(G_1(x)-G_2(x)\right)'=G_1'(x)-G_2'(x)=f(x)-f(x)=0$. La derivata della differenza tra le due primitive è zero quindi significa che differiscono per una costante.

INTEGRALI DEFINITI E INTEGRALI INDEFINITI

Si dicono integrali definiti quando sono presenti gli estremi di integrazione $\int_a^b f(x)\,dx$, dove $f(x)$ è detta funzione integranda. Si dicono integrali indefiniti quando non sono presenti gli estremi di integrazione.

Nel primo caso si può utilizzare la **formula fondamentale del calcolo integrale**:

$$\int_a^b f(x)\,dx=\left[F(x)\right]_a^b=F(b)-F(a)$$

Essa si ottiene facilmente a partire dal teorema fondamentale del calcolo integrale. Infatti $\int_a^x f(t)\,dt = G(x)$ la funzione integrale è una primitiva della funzione $f(x)$ quindi $G(x) = F(x) + c$, dove $F(x)$ è una qualunque altra primitiva.

Posto $x = a$, si ha che $\int_a^a f(t)\,dt = G(a) = 0$ dalle proprietà della funzione integrale. Significa che $G(x)$ è una primitiva particolare che deve rispettare la proprietà che $G(a) = 0$.

Posto $x = b$ si ha che $\int_a^b f(t)\,dt = G(b) = G(b) - G(a)$. Sto sottraendo zero quindi non cambia niente.

$\int_a^b f(t)\,dt = G(b) = F(b) + c - F(a) - c = F(b) - F(a)$.

L'integrale indefinito si riduce invece alla ricerca di una primitiva della funzione:

$\int f(x)\,dx = F(x) + c$

ESERCIZI SUGLI INTEGRALI

In questa sezione impareremo a risolvere gli esercizi sugli integrali. Per questo faremo riferimento a sole funzioni continue per le quali è possibile calcolare la primitiva. In generale è bene sapere che malgrado tutte le funzioni continue ammettono primitiva non è sempre facile trovarla e non è detto che essa si possa scrivere come composizione di funzioni elementari (si pensi ad esempio alla funzione Gaussiana $f(x)=e^{-x^2}$). Questo però non è un problema di chi affronta l'esame di analisi 1.

INTEGRALI INDEFINITI

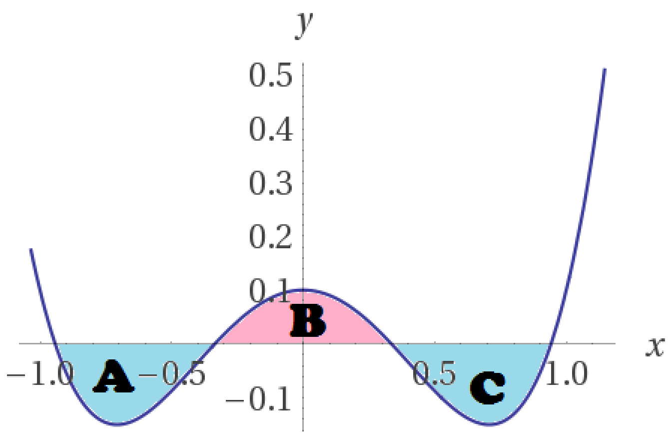
$$\int f(x)\,dx$$

INDEGRALI DEFINITI

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

SIGNIFICATO GEOMETRICO DEGLI INTEGRALI DEFINITI

Rappresenta la somma delle aree che la funzione sottende nell'intervallo $[a,b]$ prese positivamente nei sottointervalli in cui la funzione è positiva e negativamente se la funzione è negativa.



Ad esempio l'integrale nell'intervallo $[-1,1]$ della funzione in figura è data dall'area rosa meno la somma delle aree azzurre.

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = -A+B-C$$

PRIMITIVA DI UNA FUNZIONE

E’ quella funzione F(x) tale che $F'(x)=f(x)$

FORMULA FONDAMENTALE DEL CALCOLO INTEGRALE (PER INTEGRALI DEFINITI)

$$\int_a^b f(x)dx = F(b)-F(a)$$

FORMULA RISOLUTIVA PER INTEGRALI INDEFINITI

$$\int f(x)dx = F(x)+c$$

RAPPORTO DI POLINOMI IN 4 PASSI

PASSO 1

DIVISIONE TRA POLINOMI

Se il grado del numeratore è maggiore o uguale rispetto a quello del denominatore, bisogna fare la divisione tra il polinomio al numeratore $P(x)$ e quello al denominatore $Q(x)$, altrimenti andare direttamente al passo 2.

$$\begin{array}{l|l} P(x) & Q(x) \\ \cline{2-2} R(x) & A(x) \end{array}$$

A(x) è il risultato della divisione tra i polinomi P(x) e Q(x), R(x) è il resto della divisione. Bisogna applicare la seguente formula:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = A(x)+\frac{R(x)}{Q(x)}$$

A questo punto, si ottiene un polinomio $A(x)$ facile da integrare e un rapporto di polinomi in cui il grado del numeratore è inferiore rispetto a quello del denominatore.

Es1

$$\int \frac{x^5+2x-3}{x^3-x+1}\,dx$$

Divisione:

$$
\begin{array}{cccccc|ccc}
x^5 & & & & +2x & -3 & x^3 & +x^2 & -1 \\
\cline{7-9}
-x^5 & -x^4 & & +x^2 & & & x^2 & -x & +1 \\
\cline{1-6}
= & -x^4 & & +x^2 & +2x & -3 & & & \\
 & +x^4 & +x^3 & & -x & & & & \\
\cline{1-6}
 & = & +x^3 & +x^2 & +x & -3 & & & \\
 & & -x^3 & -x^2 & & +1 & & & \\
\cline{1-6}
 & & = & = & +x & -2 & & &
\end{array}
$$

Si applica la formula:

$$\int \frac{x^5+2x-3}{x^3-x+1}dx = \int\left(\frac{x-2}{x^3+x^2-1}+x^2-x+1\right)dx$$

PASSO 2

FATTORIZZAZIONE

Un qualsiasi polinomio, può essere scomposto in fattori di primo e secondo grado, ciascuno con la propria molteplicità.

$$Q(x)=\underbrace{(a_1x+b_1)^{\alpha_1}\cdot\ldots(a_1x+b_1)^{\alpha_m}}_{m\ \text{fattori di primo grado}}\underbrace{(c_1x^2+d_1x+e_1)^{\beta_1}\cdot\ldots(c_kx^2+d_kx+e_k)^{\beta_k}}_{k\ \text{fattori di secondo grado con}\ \Delta<0}$$

Dove $\{\alpha_1,..,\alpha_m,\beta_1,...,\beta_k\}$ sono le molteplicità algebriche.

Es1. $p(x)=x^2-4$ riconosco il prodotto notevole $a^2-b^2=(a-b)(a+b)$, da cui scompongo: $p(x)=(x-2)(x+2)$: 2 fattori di primo grado con molteplicità unitaria

Es2. $p(x)=x^2+4$ somma di due numeri positivi → non ammette radici reali → non si può ulteriormente scomporre → fattore di secondo grado $\Delta<0$ con molteplicità unitaria

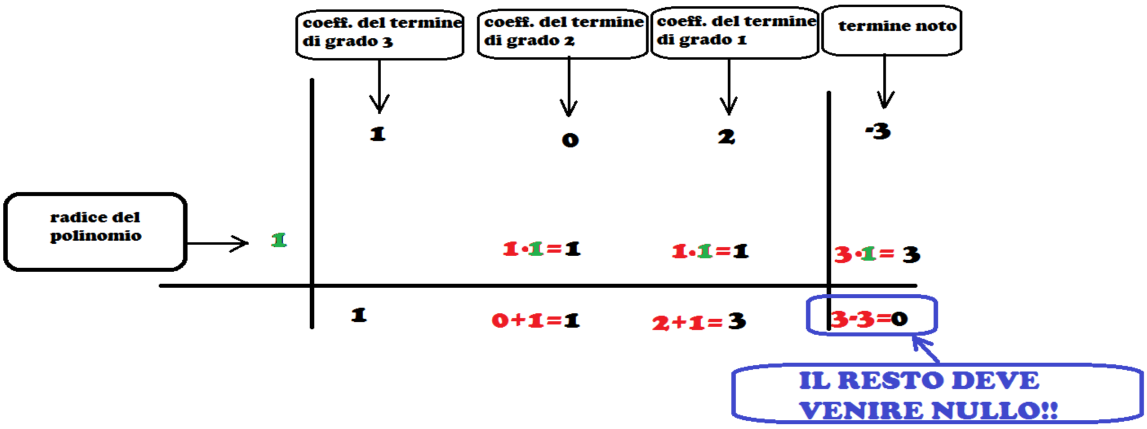
Es3. $p(x)=2x^2-3x+1$ → cerco le radici: $r_{1,2}=\dfrac{3\pm\sqrt{9-8}}{2}$ siamo nel caso $\Delta>0$, $r_1=2$ $r_2=1$, → applico la formula $ax^2+bx+c=a(x-r_1)(x-r_2)$ e si ottiene infine: $2x^2-3x+1=2\left(x-\dfrac{1}{2}\right)(x-1)$

Es4. $p(x)=x^2+2x+1$ → $\Delta=\sqrt{4-4}=0$ → si tratta del quadrato di un binomio, quindi la fattorizzazione è data da $(x+1)^2$, si tratta cioè di un fattore di primo grado con molteplicità 2

Es5. $p(x)=3x^3+3\sqrt[3]{9}\,x^2+3\sqrt[3]{3}\,x+1$, riconosco che si tratta di un cubo di binomio $(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$, quindi la fattorizzazione risulta: $3x^3+3\sqrt[3]{9}\,x^2+3\sqrt[3]{3}\,x+1=\left(\sqrt[3]{3}x+1\right)^3$, ovvero un fattore di primo grado con molteplicità 3

Es6. $p(x)=x^5+x^3$ in questo caso è possibile raccogliere una x^3 e si ottiene: $p(x)=x^3\left(x^2+1\right)$ → 1 fattore di primo grado con molteplicità 3 e un fattore di secondo grado $\Delta<0$ con molteplicità unitaria

Es7. $p(x)=x^3+2x-3$, si può applicare la regola di Ruffini considerato che una radice è $r=1$



Da cui $p(x)=x^3+2x-3=(x-1)\left(x^2+x+3\right)$, a questo punto osservando che il secondo fattore ha $\Delta<0$, si ha che non possibile scomporlo ulteriormente e quindi c'è un fattore di primo grado ed uno di secondo grado.

PASSO 3

SCOMPOSIZIONE IN FRAZIONI

1. RADICI CON MOLTEPLICITÀ UNITARIA

Esempio

$$\frac{P(x)}{(x-1)\left(x^2+x+1\right)(x+2)(x^2+3)}=\frac{A}{x-1}+\frac{Bx+C}{x^2+x+1}+\frac{D}{x+2}+\frac{Ex+D}{x^2+3}$$

2. RADICI CON MOLTEPLICITÀ ALGEBRICA NON UNITARIA

Esempio

$$\frac{P(x)}{(x-2)(x+1)^3(x+2)^2(x^2+1)^2}=\underbrace{\frac{A}{x-2}+\frac{B}{x+1}+\frac{C}{x+2}+\frac{Dx+E}{x^2+1}}_{\text{come nel caso con molteplicità unitaria}}+\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\overbrace{F+Gx+Hx^2+Ix^3+Lx^4}^{\text{polinomio di un grado più piccolo rispetto al denom.}}}{\underbrace{(x+1)^2(x+2)(x^2+1)}_{\text{quello che resta del denom. } Q(x)}}\right)$$

MINIMO COMUNE MULTIPLO

Fatta la scomposizione bisogna fare il minimo comune multiplo e riscrivere il numeratore in forma polinomiale.

$$\frac{3x^2+2}{(x-1)(x^2+3)}=\frac{A}{x-1}+\frac{Bx+C}{x^2+3}=\frac{A(x^2+3)+(Bx+C)(x-1)}{(x-1)(x^2+3)}=\frac{Ax^2+3A+Bx^2+Cx-Bx-C}{(x-1)(x^2+3)}$$

$$=\frac{(A+B)x^2+(C-B)x+(3A-C)}{(x-1)(x^2+3)}$$

RICAVARE IL SISTEMA

Applicando il **principiò di identità tra polinomi** ricavare e risolvere il sistema lineare per il calcolo dei coefficienti.

$$(A+B)x^2+(C-B)x+(3A-C)=3x^2+2$$

Uguagliando i termini dello stesso grado, si ottiene il sistema lineare:

$$\begin{cases} A+B=3 \\ C-B=0 \\ 3A-C=2 \end{cases}$$

PASSO 4

INTEGRAZIONE

Dopo aver spezzato l’integrale in una somma di integrali, gli integrali si risolvono uno per volta.

A questo punto l’integrale risulta scomposto in frazioni, che possono essere di 4 tipi:

Tipo 1.

$$\int A(x)\,dx=\int a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x+a_0\;dx=a_n\frac{x^{n+1}}{n+1}+a_{n-1}\frac{x^n}{n}+..+a_1\frac{x^2}{2}+a_0x$$

Tipo 2.

$$\int \frac{A}{ax+b}dx = \frac{A\log|ax+b|}{a}$$

Tipo 3.

$$\int \frac{\partial}{\partial x}\left(f(x)\right)dx = f(x)$$

Tipo 4.

$$\int \frac{Ax+B}{ax^2+bx+c}dx = \frac{A}{2a}\ln\left|ax^2+bx+c\right| + \frac{2aB-bA}{a\sqrt{-\Delta}}\arctan\left(\frac{2ax+b}{\sqrt{-\Delta}}\right)+k$$

Se A=0

$$\int \frac{B}{ax^2+bx+c}dx = \frac{2aB}{a\sqrt{-\Delta}}\arctan\left(\frac{2ax+b}{\sqrt{-\Delta}}\right)+k$$

Se b=0

$$\int \frac{Ax+B}{ax^2+c}dx = \frac{A}{2a}\ln\left|ax^2+c\right| + \frac{B}{\sqrt{ac}}\arctan\left(\sqrt{\frac{a}{c}}\;x\right)+k$$

Dimostrazione

$$\int \frac{Ax+B}{ax^2+bx+c}dx = \int \frac{\gamma(2ax+b)+\beta}{ax^2+bx+c}dx = \gamma\int \frac{2ax+b}{ax^2+bx+c}dx + \beta\int \frac{1}{ax^2+bx+c}dx$$

$$2a\gamma x + b\gamma + \beta = Ax+B$$

Dal principio di identità dei polinomi si ha:

$$\gamma = \frac{A}{2a} \quad \Rightarrow \; \beta = B - b\gamma = B - b\frac{A}{2a} = \frac{2aB-bA}{2a}$$

A questo punto bisogna risolvere due integrali. Iniziamo dal primo:

$$\gamma\int \frac{2ax+b}{ax^2+bx+c}dx = \gamma\ln\left|ax^2+bx+c\right| = \frac{A}{2a}\ln\left|ax^2+bx+c\right|$$

Passiamo al secondo integrale:

$$\beta\int\frac{1}{ax^2+bx+c}dx$$

Al denominatore si vuole ottenere il quadrato di un binomio.

Allora si pone:

$$\begin{cases}ax^2=t^2\\bx=2tm\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\sqrt{a}x=t\\bx=2\sqrt{a}tm\end{cases}\Rightarrow\ m=\frac{b}{2\sqrt{a}}$$

Si aggiunge e sottrae m^2 ad denominatore.

$$\beta\int\frac{1}{ax^2+bx+m^2-m^2+c}dx=\beta\int\frac{1}{\left(ax^2+bx+m^2\right)-m^2+c}dx$$

$$=\beta\int\frac{1}{\left(\sqrt{a}x+\frac{b}{2\sqrt{a}}\right)^2-\frac{b^2}{4a}+c}dx=\beta\int\frac{1}{\left(\sqrt{a}x+\frac{b}{2\sqrt{a}}\right)^2+\frac{-b^2+4ac}{4a}}dx$$

Ponendo $\Delta=b^2-4ac$

$$\beta\int\frac{1}{\left(\sqrt{a}x+\frac{b}{2\sqrt{a}}\right)^2+\frac{-\Delta}{4a}}dx=\beta\frac{4a}{-\Delta}\int\frac{1}{\left(\frac{2\sqrt{a}}{\sqrt{-\Delta}}\left(\sqrt{a}x+\frac{b}{2\sqrt{a}}\right)\right)^2+1}dx$$

$$=\beta\frac{2}{\sqrt{-\Delta}}\int\frac{\frac{2a}{\sqrt{-\Delta}}}{\left(\frac{2ax+b}{\sqrt{-\Delta}}\right)^2+1}dx=\frac{2aB-bA}{2a}\frac{2}{\sqrt{-\Delta}}\arctan\left(\frac{2ax+b}{\sqrt{-\Delta}}\right)$$

$$=\frac{4aB-2bA}{\sqrt{-\Delta}}\arctan\left(\frac{2ax+b}{\sqrt{-\Delta}}\right)$$

Infine sommando i due integrali si ha:

$$\int\frac{Ax+B}{ax^2+bx+c}dx=\frac{A}{2a}\ln\left|ax^2+bx+c\right|+\frac{2aB-bA}{a\sqrt{-\Delta}}\arctan\left(\frac{2ax+b}{\sqrt{-\Delta}}\right)+k$$

Esempio 1

$$\int\frac{2}{2x^2+3}=$$

Raccolgo un 3 al denominatore:

$$=\int \frac{2}{3\left(\frac{2}{3}x^2+1\right)}=\frac{2}{3}\int \frac{1}{\left(\frac{2}{3}x^2+1\right)}=$$

Porto il $\frac{2}{3}$ nel quadrato:

$$=\frac{2}{3}\int \frac{1}{\left(\left(\sqrt{\frac{2}{3}}x\right)^2+1\right)}=$$

Moltiplico e divido per la derivata del termine nel quadrato

$$=\frac{2}{3}\sqrt{\frac{3}{2}}\int \frac{\sqrt{\frac{2}{3}}}{\left(\left(\sqrt{\frac{2}{3}}x\right)^2+1\right)}=\sqrt{\frac{2}{3}}\arctan\left(\sqrt{\frac{2}{3}}x\right)$$

Esempio 2

Il denominatore è di secondo grado e non scomponibile:

$$\int \frac{2x+3}{x^2+2x+3}dx=$$

Metto nella parentesi la derivata del denominatore:

$$=\int \frac{\alpha(2x+1)+\beta}{x^2+2x+3}dx=\alpha\int \frac{2x+1}{x^2+2x+3}dx+\beta\int \frac{1}{x^2+2x+3}dx$$

Applico il principio di identità dei polinomi

$$\alpha(2x+1)+\beta=(2\alpha)x+(\alpha+\beta)=2x+3$$

$$\begin{cases}2\alpha=2\\ \alpha+\beta=3\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\alpha=1\\ \beta=2\end{cases}$$

Spezzare l'integrale in due:

$$=\int \frac{(2x+1)}{x^2+2x+3}dx+2\int \frac{1}{x^2+2x+3}dx$$

Risolviamo gli integrali uno alla volta.

Il primo è immediato:

$$\int \frac{(2x+1)}{x^2+2x+3}dx = \log\left|x^2+2x+3\right|$$

Il secondo integrale va ancora un po' trattato:

$$2\int \frac{1}{x^2+2x+3}dx = 2\int \frac{1}{x^2+2x+b^2-b^2+3}dx =$$

Bisogna ottenere un quadrato perfetto al denominatore:

$$\begin{cases} a^2 = x^2 \\ 2ab = 2x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = x \\ 2xb = 2x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = x \\ b = 1 \end{cases} \Rightarrow b^2 = 1$$

$$= 2\int \frac{1}{(x^2+2x+1)-1+3}dx = 2\int \frac{1}{(x+1)^2+2}dx =$$

Raccogliere un 2 al denominatore:

$$= 2\int \frac{1}{2\left[\frac{(x+1)^2}{2}+1\right]}dx =$$

Portare tutto nel quadrato:

$$= 2\int \frac{1}{2\left[\left(\frac{x+1}{\sqrt{2}}\right)^2+1\right]}dx = \int \frac{1}{\left[\left(\frac{x+1}{\sqrt{2}}\right)^2+1\right]}dx =$$

Moltiplicare e dividere per derivata del termine nel quadrato:

$$= \sqrt{2}\int \frac{\frac{1}{\sqrt{2}}}{\left[\left(\frac{x+1}{\sqrt{2}}\right)^2+1\right]}dx = \sqrt{2}\arctan\left(\frac{x+1}{\sqrt{2}}\right)$$

Mettiamo infine insieme i risultati dei singoli integrali.

$$\int \frac{x+1}{x^2+2x+2}dx = \ln\left|x^2+2x+3\right| + \sqrt{2}\arctan\left(\frac{x+1}{\sqrt{2}}\right)$$

INTEGRAZIONE PER PARTI

CASO INDEFINITO

$$\int f(x)g(x)dx = F(x)g(x) - \int F(x)g'(x)dx$$

CASO DEFINITO

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = \left[F(x)g(x)\right]_a^b - \int_a^b F(x)g'(x)dx$$

Dimostrazione

Si parte dalla derivata del prodotto:

$$\left(f(x)g(x)\right)' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

$$f'(x)g(x) = \left(f(x)g(x)\right)' - f(x)g'(x)$$

Integrando entrambe i membri si ottiene:

$$\int f'(x)g(x)dx = \int \left(f(x)g(x)\right)' dx - \int f(x)g'(x)\, dx$$

Osservando che se partendo da una funzione prima si deriva e poi si integra si torna alla funzione di partenza $\int \left(f(x)g(x)\right)' dx = f(x)g(x)$ si ha che:

$$\int f'(x)g(x)dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)\, dx$$

In seguito sono riportate alcune situazioni in cui risulta vantaggioso. Con la f è stata definita la funzione da integrare e con la g quella da derivare. Nei casi seguenti bisogna avere $p(x)$ polinomio di primo grado, e $q(x)$ polinomio di grado qualunque.

$$\int \underbrace{e^{p(x)}}_{f} \cdot \underbrace{q(x)}_{g} dx$$

$$\int \underbrace{\cos\left(p(x)\right)}_{f} \cdot \underbrace{q(x)}_{g} dx$$

$$\int \underbrace{\sin\left(p(x)\right)}_{f} \cdot \underbrace{q(x)}_{g} dx$$

Esempio 1

$$\int e^x x\, dx = e^x x - \int e^x dx = e^x x - e^x + c$$

Esempio 2

$$\int e^{2x+3}\left(3x^2+1\right) dx = \frac{1}{2}e^{2x+3}\left(3x^2+1\right) - \int \frac{1}{2}e^{2x+3}6x\, dx$$

$$= \frac{1}{2}e^{2x+3}\left(3x^2+1\right) - \frac{1}{4}e^{2x+3}\left(6x\right) + \int \frac{1}{4}e^{2x+3}6\, dx = \frac{1}{2}e^{2x+3}\left(3x^2+1\right) - \frac{1}{4}e^{2x+3}\left(6x\right) + \frac{6}{8}e^{2x+3} =$$

$$= \frac{1}{4}e^{2x+3}\left(6x^2-6x+5\right) + c$$

Per i casi seguenti invece considerare $p(x)$ e $q(x)$ polinomi di grado qualunque.

$$\int \underbrace{\ln\left(p(x)\right)}_{g} \cdot \underset{f}{q(x)}\, dx$$

$$\int \underbrace{\arctan\left(p(x)\right)}_{g} \cdot \underbrace{\left(q(x)\right)}_{f} dx$$

$$\int \underbrace{\arcsin\left(p(x)\right)}_{g} \cdot \underbrace{\left(q(x)\right)}_{f} dx$$

$$\int \underbrace{\arccos\left(p(x)\right)}_{g} \cdot \underset{f}{q(x)}\, dx$$

Esempio 3

$$\int x \ln(1+x)\, dx =$$

$$= \frac{x^2}{2}\ln|1+x| - \frac{1}{2}\int \frac{x^2-1+1}{1+x} dx$$

$$= \frac{x^2}{2}\ln|1+x| - \frac{1}{2}\int \frac{x^2-1}{1+x} dx + \frac{1}{2}\int \frac{1}{1+x} dx =$$

$$= \frac{x^2}{2}\ln|1+x| - \frac{1}{2}\int (x-1)\, dx + \frac{1}{2}\ln|1+x| =$$

$$=\frac{x^2}{2}\ln|1+x|-\frac{x^2}{4}+\frac{x}{2}+\frac{1}{2}\ln|1+x|=\frac{1}{4}\left[2\left(x^2+1\right)\ln|1+x|-x^2+2x\right]+c$$

Un altro modo di applicare l'integrazione per parti, è quello di cercare di riottenere la funzione che si sta integrando e poi risolvere come un equazione di primo grado. Una situazione in cui funziona questa tecnica è la seguente:

$$\int e^{p(x)}\cos\left(q(x)\right)dx \quad con \quad p(x) \ e \ q(x) \ \ polinomi\,di\,primo\,grado$$

Esempio 4

$$\int e^x \cos x\,dx=$$

Applico integrazione per parti

$$=e^x\cos x+\int e^x \sin x\,dx=$$

Applico ancora integrazione per parti

$$=e^x\cos x+e^x\sin x-\int e^x\cos x\,dx$$

A questo punto ho ottenuto un equazione di primo grado nella variabile $\int e^x \cos x\,dx$

$$\int e^x\cos x\,dx=e^x\cos x+e^x\sin x-\int e^x\cos x\,dx$$

$$2\int e^x\cos x\,dx=e^x\cos x+e^x\sin x$$

Ed infine: $\int e^x\cos x\,dx=\dfrac{e^x\cos x+e^x\sin x}{2}+c$

Esempio 5

$$\int \sin^2 x\,dx$$

tecnica 1

$$=\int\sin^2 x\,dx=\int\sin x\sin x dx=$$

Si applica l'integrazione per parti

$$-\cos x \sin x + \int \cos^2 x \, dx =$$

Passaggio di trigonometria: porre $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x \, dx$

$$-\cos x \sin x + \int \left(1 - \sin^2 x\right) dx =$$

Si ottiene infine:

$$\int \sin^2 x \, dx = -\cos x \sin x + x - \int \sin^2 x \, dx$$

Da cui è possibile svolgerlo come un equazione di primo grado:

$$2\int \sin^2 x \, dx = -\cos x \sin x + x$$

Ed infine:

$$\int \sin^2 x \, dx = -\frac{1}{2} \cos x \sin x + \frac{1}{2} x$$

Ricordando la formula di duplicazione del seno $\sin(2x) = 2\sin x \cos x$, il risultato può essere riscritto nella seguente forma:

$$\int \sin^2 x \, dx = -\frac{1}{4} \sin(2x) + \frac{1}{2} x$$

tecnica 2

$$\int \sin^2 x \, dx =$$

$$= \int \sin^2 x \, dx + \int \cos^2 x \, dx - \int \cos^2 x \, dx$$

$$= \int \left(\sin^2 x - \cos^2 x\right) dx + \int \cos^2 x \, dx$$

Formula di duplicazione del coseno: $\cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x$

$$\int \sin^2 x \, dx = \int -\cos(2x) \, dx + \int 1 - \sin^2 x \, dx$$

Anche in questo caso si può risolvere come un equazione di primo grado nell'incognita $\int \sin^2 x \, dx$

$$2\int \sin^2 x \, dx = -\frac{\sin(2x)}{2} + x$$

Infine:

$$\int \sin^2 x\,dx = -\frac{\sin(2x)}{4} + \frac{x}{2}$$

Esempio 6

$$\int e^x \sin^2 x\,dx =$$

$$= \int e^x \left(\sin^2 x\,dx - \cos^2 x + \cos^2 x\right)dx =$$

$$= \int e^x \left(\sin^2 x\,dx - \cos^2 x\right)dx + \int e^x \cos^2 x\ dx =$$

Applico la formula di duplicazione del coseno. E inoltre scrivo $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$

$$= \int e^x \left(-\cos(2x)\right)dx + \int e^x \left(1 - \sin^2 x\right)\ dx$$

A questo punto si può risolvere come un equazione di primo grado.

$$\int e^x \sin^2 x\,dx = -\int e^x \cos(2x)\,dx + e^x - \int e^x \sin^2 x\ \ dx$$

$$2\int e^x \sin^2 x\,dx = -\int e^x \cos(2x)\,dx + e^x$$

$$\int e^x \sin^2 x\,dx = -\frac{1}{2}\int e^x \cos(2x)\,dx + \frac{1}{2}e^x$$

Risolvo a parte l’integrale $\int e^x \cos(2x)\,dx$

$$\int e^x \cos(2x)\,dx = e^x\cos(2x) + \int e^x 2\sin(2x)\,dx = e^x\cos(2x) + 2e^x\sin(2x) - \int e^x 4\cos(2x)\,dx$$

$$5\int e^x \cos(2x)\,dx = e^x\cos(2x) + 2e^x\sin(2x)$$

$$\int e^x \cos(2x)\,dx = \frac{1}{5}e^x\cos(2x) + \frac{2}{5}e^x\sin(2x)$$

Sostituisco nell’integrale di partenza:

$$\int e^x \sin^2 x\,dx = -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{5}e^x\cos(2x) + \frac{2}{5}e^x\sin(2x)\right) + \frac{1}{2}e^x$$

Esempio 7

$$\int \frac{x}{\cos^2 x}\,dx =$$

$$= x\tan x - \int \tan x\, dx =$$

$$= x\tan x - \int \frac{\sin x}{\cos x} dx = x\tan x + \ln|\cos x| =$$

Esempio 8

Partiamo da:

$$\int e^{x^2} x\, dx = \frac{1}{2}\int e^{x^2} 2x\, dx = \frac{1}{2}e^{x^2}$$

Proviamo a sostituire nell'integrale x con x^3.

$$\int e^{x^2} x^3 dx =$$

$$\int \left(e^{x^2} 2x\right)\frac{1}{2}x^2\, dx = e^{x^2}\frac{1}{2}x^2 - \int e^{x^2} x\, dx = e^{x^2}\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}\int\left(e^{x^2} 2x\right)dx = \frac{1}{2}e^{x^2}x^2 - \frac{1}{2}e^{x^2}$$

Proviamo ora a sostituire nell'integrale x^3 con x^5.

$$\int e^{x^2} x^5 dx =$$

$$\int \left(e^{x^2} 2x\right)\frac{1}{2}x^4\, dx = e^{x^2}\frac{1}{2}x^4 - \int e^{x^2} 2x^3\, dx = e^{x^2}\frac{1}{2}x^4 - \int\left(e^{x^2} 2x\right)x^2 dx =$$

$$= e^{x^2}\frac{1}{2}x^4 - e^{x^2}x^2 + \int\left(e^{x^2} 2x\right)dx = \frac{1}{2}e^{x^2}x^4 - e^{x^2}x^2 + e^{x^2}$$

Proviamo ora a sostituire nell'integrale x^5 con x^n, con n dispari.

$$\int e^{x^2} x^n dx =$$

Prima ricorsione:

$$\int \left(e^{x^2} 2x\right)\frac{1}{2}x^{n-1}dx = e^{x^2}\frac{1}{2}x^{n-1} - \int e^{x^2}\frac{n-1}{2}x^{n-2}dx =$$

Seconda ricorsione:

$$e^{x^2}\frac{1}{2}x^{n-1} - \frac{1}{2}\frac{n-1}{2}\int\left(2xe^{x^2}\right)x^{n-3}dx = e^{x^2}\frac{1}{2}x^{n-1} - \frac{1}{2}\frac{n-1}{2}e^{x^2}x^{n-3} + \frac{1}{2}\frac{n-1}{2}\int e^{x^2}(n-3)x^{n-4}dx$$

Terza ricorsione:

$$= e^{x^2}\frac{1}{2}x^{n-1} - \frac{1}{2}\frac{n-1}{2}e^{x^2}x^{n-3} + \frac{1}{2}\frac{n-1}{2}\frac{n-3}{2}\int\left(2xe^{x^2}\right)x^{n-5}dx =$$

$$= e^{x^2}\frac{1}{2}x^{n-1} - \frac{1}{2}\frac{n-1}{2}e^{x^2}x^{n-3} + \frac{1}{2}\frac{n-1}{2}\frac{n-3}{2}e^{x^2}x^{n-5} - \ldots$$

A questo punto si può proseguire per logica.

$$\int e^{x^2}x^n dx = \frac{1}{2}e^{x^2}x^{n-1} - \frac{1}{2}\frac{n-1}{2}e^{x^2}x^{n-3} + \frac{1}{2}\frac{n-1}{2}\frac{n-3}{2}e^{x^2}x^{n-5} - \frac{1}{2}\frac{n-1}{2}\frac{n-3}{2}\frac{n-5}{2}e^{x^2}x^{n-5} + \ldots =$$

$$= \frac{1}{2}e^{x^2}x^{n-1} - \frac{1}{2^2}(n-1)e^{x^2}x^{n-3} + \frac{1}{2^3}(n-1)(n-3)e^{x^2}x^{n-5} - \frac{1}{2^4}(n-1)(n-3)(n-5)e^{x^2}x^{n-5} + \ldots$$

A questo punto per scrivere il risultato ottenuto in forma più elegante si può utilizzare $n!! \doteq (n)(n-2)(n-4)\cdot\ldots$

$$= e^{x^2}\frac{1}{2^1}\frac{(n-1)!!}{(n-1)!!}x^{n-1} - \frac{1}{2^2}\frac{(n-1)!!}{(n-3)!!}e^{x^2}x^{n-3} + \frac{1}{2^3}\frac{(n-1)!!}{(n-5)!!}e^{x^2}x^{n-5} - \frac{1}{2^4}\frac{(n-1)!!}{(n-7)!!}e^{x^2}x^{n-5} + \ldots =$$

$$= e^{x^2}\cdot\sum_{k=\frac{n+1}{2}}^{n}(-1)^{n-k}\frac{1}{2^{n-k+1}}\frac{(n-1)!!}{(2k-n-1)!!}x^{(2k-n-1)}$$

A questo punto dimostriamo la correttezza del risultato ottenuto per **induzione**.

$$\int e^{x^2}x^n dx = e^{x^2}\cdot\sum_{k=\frac{n+1}{2}}^{n}(-1)^{n-k}\frac{1}{2^{n-k+1}}\frac{(n-1)!!}{(2k-n-1)!!}x^{(2k-n-1)}$$

Passo 0:

Dimostriamo i risultati già ottenuti:

Verifichiamo il risultato per $n=1$

$$\int e^{x^2}x^1 dx = e^{x^2}\cdot\sum_{k=1}^{1}(-1)^{n-k}\frac{1}{2^{2-k}}\frac{0!!}{(2k-2)!!}x^{2k-2} = e^{x^2}\cdot(-1)^0\frac{1}{2^{+1}}\frac{(0)!!}{(0)!!}x^0 = \frac{1}{2}e^{x^2}$$

Anche se non necessario verifichiamo il risultato anche per $n=3$

$$\int e^{x^2}x^3 dx = e^{x^2}\cdot\sum_{k=2}^{3}(-1)^{3-k}\frac{1}{2^{4-k}}\frac{2!!}{(2k-4)!!}x^{2k-4} = e^{x^2}\left(-\frac{1}{2^2}\frac{2!!}{0!!}x^0 + \frac{1}{2}x^2\frac{2!!}{(2)!!}x^2\right) =$$

$$= e^{x^2}\left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}x^2\right)$$

Anche se non necessario verifichiamo il risultato anche per $n=5$

$$\int e^{x^2} x^5 dx = e^{x^2} \cdot \sum_{k=3}^{5} (-1)^{5-k} \frac{1}{2^{6-k}} \frac{(4)!!}{(2k-6)!!} x^{2k-6} =$$

$$e^{x^2}\left(+\frac{1}{2^3}\frac{4!!}{0!!}x^0 - \frac{1}{2^2}\frac{4!!}{2!!}x^2 + \frac{1}{2}\frac{4!!}{4!!}x^4\right) = e^{x^2}\left(1 - x^2 + \frac{1}{2}x^4\right)$$

Dimostriamo il passo induttivo. Bisogna dimostrare che è vera l'implicazione:

$$\int e^{x^2} x^n dx = e^{x^2} \cdot \sum_{k=\frac{n+1}{2}}^{n} (-1)^{n-k} \frac{1}{2^{n-k+1}} \frac{(n-1)!!}{(2k-n-1)!!} x^{(2k-n-1)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int e^{x^2} x^{n+2} dx = e^{x^2} \cdot \sum_{k=\frac{n+3}{2}}^{n+2} (-1)^{n+2-k} \frac{1}{2^{n+3-k}} \frac{(n+1)!!}{(2k-n-3)!!} x^{(2k-n-3)}$$

$$\int e^{x^2} x^{n+2} dx = \frac{1}{2}\int \left(e^{x^2} 2x\right) x^{n+1} dx = \frac{1}{2} e^{x^2} x^{n+1} - \frac{1}{2}(n+1)\int e^{x^2} x^n \, dx$$

$$\frac{1}{2}x^{n+1} - \sum_{k=\frac{n+1}{2}}^{n} (-1)^{n-k} \frac{1}{2^{n-k+2}} \frac{(n+1)!!}{(2k-n-1)!!} x^{(2k-n-1)} =$$

$$\frac{1}{2}x^{n+1} - \frac{1}{2^2}(n+1)x^n + \frac{1}{2^3}(n+1)(n-1)x^{n-1} + \ldots + (-1)^{\frac{n-1}{2}} \frac{1}{2^{\frac{n+3}{2}}}(n+1)!!$$

$$\sum_{k=\frac{n+3}{2}}^{n+2} (-1)^{n+2-k} \frac{1}{2^{n+3-k}} \frac{(n+1)!!}{(2k-n-3)!!} x^{(2k-n-3)} =$$

$$\frac{1}{2}x^{n+1} - \frac{1}{2^2}(n+1)x^{n-1} + \ldots + (-1)^{\frac{n+1}{2}} \frac{1}{2^{\frac{n+3}{2}}}(n+1)!!$$

INTEGRAZIONE PER SOSTITUZIONE

$$\int_a^b f(x)dx$$

Voglio sostituire la variabile x con un'altra variabile y legata ad x dalla funzione $y = g(x)$.

PASSO 1

Ci sono due opzioni:

1. Ricavo x in funzione di y

   $$x = g^{-1}(y) \quad \Rightarrow \quad dx = \left[g^{-1}(y)\right]' dy$$

2. Derivo direttamente:

   $$g(x) = y \quad \Rightarrow \quad \left[g(x)\right]' dx = dy$$

PASSO 2

Sostituisco nella funzione le y con $g(x)$ e le x con $g^{-1}(y)$

PASSO 3

Se l'integrale è definito cambio gli estremi di integrazione

$$x = a \quad \Rightarrow \quad y = g(a)$$
$$x = b \quad \Rightarrow \quad y = g(b)$$

Quindi ottengo:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(y)\frac{\partial}{\partial y}\left[g^{-1}(y)\right]dy$$

SOSTITUZIONI RAZIONALIZZANTI

Sia $R(t)$, una qualsiasi funzione razionale (rapporto di polinomi).

Integrali scritti nella forma:

$$\int R(f(x))\, f'(x)\, dx$$

La sostituzione da porre è $f(x)=t \quad \Rightarrow \quad f'(x)dx = dt$

Da cui si ottiene:

$$\int R(t)\, dt$$

ESPONENZIALI

$$\int R(e^{\alpha x})\, dx$$

Sostituire: $e^{\alpha x}=t \quad \Rightarrow \quad \alpha x = \ln t \quad \Rightarrow \quad dx = \frac{1}{\alpha t} dt$

E si ottiene: $\int R(t)\, \frac{1}{\alpha t} dt$

LOGARITMI

$$\int R(\ln x) \frac{1}{x} dx$$

$$\ln x = t \;\Rightarrow\; \frac{1}{x} dx = dt$$

E si ottiene: $\int R(t)\; dt$

POTENZE

$$\int R(x^{\alpha})\, x^{\alpha-1} dx$$

$$x^{\alpha}=t \;\Rightarrow\; \alpha x^{\alpha-1} dx = dt \Rightarrow x^{\alpha-1} dx = \frac{1}{\alpha} dt$$

E si ottiene: $\frac{1}{\alpha}\int R(t)\,dt$

RADICI DI POLINOMI DI PRIMO GRADO

$$\int R\left(\sqrt{ax+b},x\right)dx$$

$$\sqrt{ax+b}=t \quad \Rightarrow ax+b=t^2 \Rightarrow x=\frac{t^2-b}{a} \Rightarrow \; dx=\frac{2t}{a}dt$$

E si ottiene:

$$\int R\left(t,\frac{t^2-b}{a}\right)\frac{2t}{a}dt$$

Esempio:

$$\int_1^{\left(\frac{\pi}{2}\right)^2+1}\frac{\sin\left(\sqrt{x-1}\right)}{1+\cos\sqrt{x-1}}\frac{dx}{\sqrt{x-1}}=$$

Sostituzione: $\sqrt{x-1}=t \Rightarrow \; x-1=t^2 \; \Rightarrow \; x=t^2+1 \Rightarrow dx=2tdt$

Sostituzione agli estremi:

Se $x=\left(\frac{\pi}{2}\right)^2+1 \; \Rightarrow \; t=\sqrt{\left(\frac{\pi}{2}\right)^2+1-1}=\frac{\pi}{2}$

Se $x=1 \; \Rightarrow \; t=\sqrt{+1-1}=0$

Da cui

$$\int_0^{\pi/2}\frac{\sin(t)}{1+\cos t}\frac{2t\,dt}{t}=2\int_0^{\pi/2}\frac{\sin(t)}{1+\cos t}\,dt=-2\int_0^{\pi/2}\frac{-\sin(t)}{1+\cos t}\,dt$$

Al numeratore c'è la derivata del denominatore $\int\frac{f'(x)}{f(x)}dx=\ln\left|f(x)\right|$

Quindi il risultato dell'integrale è $-2\left[\ln\left|1+\cos t\right|\right]_0^{\pi/2}=-2(\ln 1-\ln 2)=2\ln 2=\ln 4$

RADICI DI POLINOMI DI GRADO

$$\int R\left(\sqrt{a\,x^2+b\,x+c}\right)\,dx$$

CASO 1: a>0

La sostituzione che funziona sempre si ottiene ponendo:

$$\sqrt{ax^2+bx+c}=\sqrt{a}x+t$$

Da cui facendo un po' di passaggi si ottiene:

$$ax^2+bx+c=ax^2+2\sqrt{a}xt+t^2 \Rightarrow bx+c=2\sqrt{a}xt+t^2 \Rightarrow \left(b+2\sqrt{a}t\right)x=t^2-c \Rightarrow x=\frac{t^2-c}{\left(b+2\sqrt{a}t\right)}$$

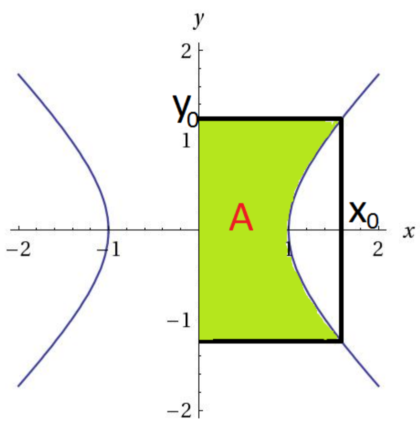
$$dx=\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{t^2-c}{\left(b+2\sqrt{at}\right)}\right]dt$$

Questa sostituzione anche se permette di ricondursi a un rapporto di polinomi (qualcosa che si sa fare) è piuttosto lunga e calcolosa. Una soluzione più rapida e ricercata per questo tipo di integrali è la sostituzione con le funzioni iperboliche.

Riportiamo le principali proprietà delle funzioni iperboliche (che assomigliano molto alle proprietà delle funzioni trigonometriche)

$$\sinh x=\frac{e^x-e^{-x}}{2}\ ,\ \cosh x=\frac{e^x+e^{-x}}{2}\ .$$

Geometricamente nel piano cartesiano possono essere rappresentate sull'iperbole $x^2-y^2=1$. In particolare preso un punto dell'iperbole di coordinate (x_0, y_0) si ha che $x_0=\cosh A$ e $y_0=\sinh A$ dove A è l'area rappresentata in figura.



La relazione fondamentale che lega seno e coseno iperbolico (si ottiene dall'equazione dell'iperbole):

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$$

Formule di duplicazione:

$$\sinh(2x) = 2\sinh x \cosh x$$

$$\cosh(2x) = \cosh^2 x + \sinh^2 x$$

Legame tra le funzioni iperboliche inverse e la funzione logaritmo:

$$\sinh^{-1}(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$$

$$\cosh^{-1}(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2-1}\right)$$

Derivata delle funzioni iperboliche:

$$(\sinh x)' = \cosh x$$

$$(\cosh x)' = \sinh x$$

$$\left[\sinh^{-1}(x)\right]' = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$$

$$\left[\cosh^{-1}(x)\right]' = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$$

Sostituzione con funzioni iperboliche

Prendiamo ad esempio il seguente integrale:

$$\int \sqrt{1+x^2}\,dx =$$

Possiamo porre $x = \sinh t \;\Rightarrow\; dx = \cosh t \; dt$ e si ha:

$$\int \sqrt{1+\sinh^2 t}\,\cosh t \; dt = \int \cosh^2 t \; dt$$

Dove si è sfruttata la relazione fondamentale che lega seno e coseno iperbolico.

$$\int \cosh^2 t \; dt = \int \cosh^2 t + \sinh^2 t - \sinh^2 t \, dt = \int \left[2\cosh(2t)\right] + \left[1 - \cosh^2 t\right] dt$$

Dove si sono sfruttate le formule di duplicazione del coseno e di nuovo la relazione fondamentale tra seno e coseno.

$$2\int \cosh^2 t \; dt = \int \cosh(2t)\,dt + \int dt$$

$$\int \cosh^2 t \; dt = \frac{1}{4}\sinh(2t) + \frac{1}{2}t = \frac{1}{2}\sinh t \cosh t + \frac{1}{2}t = \frac{1}{2}\sinh t\sqrt{1+\sinh^2 t} + \frac{1}{2}t$$

E ricostituendo la $x = \sinh t \;\Rightarrow\; t = \sinh^{-1} x = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$ si ha:

$$= \frac{1}{2}x\sqrt{1+x^2} + \frac{1}{2}\ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$$

CASO2: a<0

Sostituzione con funzioni trigonometriche

$$\int \sqrt{1-x^2}\,dx$$

Sostituzione: $x = \sin t \;\Rightarrow\; dx = \cos t \; dt \;,\; t = \arcsin x$

$$= \int \sqrt{1-\sin^2 t}\;\cos t\,dt = \int \cos^2 t\,dt$$

$$\int \cos^2 t\,dt = \int \left[\cos^2 t - \sin^2 t\right] + \left[\sin^2 t\right] dt = \int \cos(2t) + 1 - \cos^2 t \; dt$$

$$2\int \cos^2 t \; dt = \frac{\sin(2t)}{2} - t$$

$$\int \cos^2 t \; dt = \frac{\sin t \; \cos t - t}{2} = \frac{\sin t \; \sqrt{1-\sin^2 t} - t}{2} = \frac{x\sqrt{1-x^2} - \arcsin x}{2}$$

Esempio 2

$$\int \sqrt{-x^2+2x}\,dx =$$

Nella radice aggiungo e sottraggo 1 in modo da ottenere un quadrato perfetto:

$$\int \sqrt{-x^2+2x-1+1}\,dx = \int \sqrt{-(x-1)^2+1}\,dx$$

Sostituzione: $x-1 = \sin t \;\Rightarrow\; dx = \cos t \; dt \;,\; t = \arcsin(x-1)$

$$= \int \sqrt{-\sin^2 t + 1}\;\;\cos t\,dt =$$

Da cui sfrutto il risultato dell'esercizio precedente:

$$= \frac{\sin t\,\sqrt{1-\sin^2 t} - t}{2} = \frac{(x-1)\sqrt{1-(x-1)^2} - \arcsin(x-1)}{2}$$

FUNZIONI RAZIONALI IN SENO E COSENO

SOSTITUZIONE 1

$$\int R(\sin x)\cos x\, dx$$

Porre: $\sin x = t \Rightarrow \cos x dx = dt$

Sostituendo: $\int R(t)\, dt$

Identicamente:

$$\int R(\cos x)\sin x\, dx$$

Porre: $\cos x = t \Rightarrow -\sin x dx = dt$

Sostituendo: $-\int R(t)\, dt$

SOSTITUZIONE 2

$$\int R(\sin x, \cos x)\, dx$$

Parametrizzazione di seno e coseno:

$$\sin x = \frac{2t}{t^2+1} \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2} \quad \tan\left(\frac{x}{2}\right) = t \quad dx = \frac{2}{1+t^2}dt$$

Sostituendo si ottiene:

$$\int R\left(\frac{2t}{t^2+1}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\right)\frac{2}{1+t^2}dt$$

$$\int \frac{\sin x - 1}{\sin x + 1}dx$$

SOSTITUZIONE 3

$$\int R\left(\tan x, \sin^2 x, \cos^2 x\right) dx$$

$$\tan x = t \;\Rightarrow\; x = \arctan t \;\Rightarrow\; dx = \frac{1}{1+t^2}$$

$$\tan^2 x = t^2 \quad \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = t^2 \quad \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} + 1 = t^2 + 1$$

$$\frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} = t^2 + 1$$

$$\cos^2 x = \frac{1}{1+t^2}$$

$$\sin^2 x = \frac{t^2}{1+t^2}$$

$$\int R\left(\mathrm{t}, \frac{t^2}{1+t^2}, \frac{1}{1+t^2}\right) \frac{1}{1+t^2} dt$$

Esempio 1

$$\int \frac{\cot x - 1}{\cot^2 x + 1}\, dx =$$

$$\int \frac{\dfrac{\cos x}{\sin x} - 1}{\dfrac{\cos^2 x}{\sin^2 x} + 1}\, dx = \int \frac{\left(\dfrac{\cos x - \sin x}{\sin x}\right)}{\left(\dfrac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\sin^2 x}\right)}\, dx = \int (\cos x - \sin x)\sin x\, dx =$$

A questo punto si può dividere in due integrali:

$$= \int \sin x \cos x\, dx - \int \sin^2 x\ dx = \frac{(\cos x)^2}{2} - \left(-\frac{\sin(2x)}{4} + \frac{x}{2}\right) = \frac{\cos^2 x}{2} + \frac{\sin 2x}{4} - \frac{x}{2}$$

Esempio 2

$$\int \frac{1}{\sin x}\, dx =$$

Moltiplico sopra e sotto per $\sin x$

$$\int \frac{\sin x}{\sin^2 x}\, dx = \int \frac{\sin x}{1 - \cos^2 x}\, dx =$$

Sostituisco: $\cos x = t \ \Rightarrow\ -\sin x\, dx = dt$

$$-\int \frac{1}{1-t^2}\, dt = -\int \frac{1}{(1-t)(1+t)}\, dt =$$

Al numeratore aggiungo e sottraggo t , e si ha:

$$-\int \frac{1-t+t}{(1-t)(1+t)}\, dt = -\int \frac{1-t}{(1-t)(1+t)}\, dt - \int \frac{t}{1-t^2} = -\int \frac{1}{1+t}\, dt + \frac{1}{2}\int \frac{-2t}{1-t^2} dt =$$

$$-\ln|1+t| + \frac{1}{2}\ln\left|1-t^2\right| = -\ln|1+t| + \ln\sqrt{\left|1-t^2\right|} = \ln\frac{\sqrt{\left|1-t^2\right|}}{|1+t|} = \ln\frac{\sqrt{|(1-t)(1+t)|}}{|1+t|} = \ln\sqrt{\left|\frac{1-t}{1+t}\right|} =$$

E infine sostituendo $t = \cos x$ si ottiene:

$$= \ln\sqrt{\left|\frac{1-\cos x}{1+\cos x}\right|}$$

Esempio 3

$$\int \frac{\sin x}{\cos^3 x}\, dx \ =$$

Moltiplico e divido per un $\cos x$

$$\int \frac{\sin x}{\cos^3 x}\frac{\cos x}{\cos x}dx = \frac{1}{2}\int \frac{1}{\left(\cos^2 x\right)^2} 2\sin x\cos x\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{1}{\left(1-\sin^2 x\right)^2} 2\sin x\cos x\,dx =$$

In questo caso è possibile porre $\sin^2 x = t \;\Rightarrow\; 2\sin x\cos x\,dx = dt$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{1}{(1-t)^2}dt = -\frac{1}{2}\frac{1}{1-t} = -\frac{1}{2}\frac{1}{1-\sin^2 x}$$

Esempio 3

$$\int \frac{1}{1+x^4}dx =$$

Bisogna fattorizzare il denominatore che però non ammette radici reali. Cerchiamo le radici complesse:

$$1+x^4 = 0 \;\Rightarrow\; x^4 = -1 = \cos\pi + i\sin\pi \;\Rightarrow\; x = \cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{2}\right) \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \dfrac{\sqrt{2}}{2} + \dfrac{\sqrt{2}}{2}i \\ x_2 = \dfrac{\sqrt{2}}{2} - \dfrac{\sqrt{2}}{2}i \\ x_3 = -\dfrac{\sqrt{2}}{2} + \dfrac{\sqrt{2}}{2}i \\ x_4 = -\dfrac{\sqrt{2}}{2} - \dfrac{\sqrt{2}}{2}i \end{cases}$$

Ci sono due coppie di radici complesse e coniugate: $x_2 = \overline{x}_1$ e $x_4 = \overline{x}_3$.

$$1+x^4 = (x-x_1)(x-\overline{x}_1)(x-x_3)(x-\overline{x}_3) = \left(x - x(\overline{x}_1 + x_1) - \overline{x}_1 x_1\right)\left(x - x(\overline{x}_3 + x_3) - \overline{x}_3 x_3\right) =$$

Osservando che $\overline{x}_1 + x_1 = 2\,\mathrm{Re}\{x_1\}$ e che $\overline{x}_1 x_1 = |x_1|^2$

$$= \left(x^2 - 2\,\mathrm{Re}\{x_1\}x - |x_1|^2\right)\left(x^2 - 2\,\mathrm{Re}\{x_3\}x - |x_3|^2\right) = \left(x^2 - \sqrt{2}x - 1\right)\left(x^2 + \sqrt{2}\,x - 1\right)$$

$$\int \frac{1}{1+x^4}dx = \int \frac{1}{\left(x^2-\sqrt{2}x-1\right)\left(x^2+\sqrt{2}\,x-1\right)}dx = \int \frac{Ax+B}{\left(x^2-\sqrt{2}x-1\right)} + \frac{Cx+D}{\left(x^2+\sqrt{2}\,x-1\right)}dx =$$

$$= \int \frac{Ax^3 + \sqrt{2}\,Ax^2 - Ax + Bx^2 + \sqrt{2}\,Bx - B + Cx^3 - \sqrt{2}\,Cx^2 - Cx + Dx^2 - \sqrt{2}\,Dx - D}{\left(x^2-\sqrt{2}x-1\right)\left(x^2+\sqrt{2}\,x-1\right)}dx =$$

Dal principio di identità dei polinomi si ottiene il seguente sistema:

$$\begin{cases} A+C=0 \\ \sqrt{2}A+B-\sqrt{2}C+D \\ -A+\sqrt{2}B-C-\sqrt{2}D=0 \\ -B-D=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=\frac{1}{2\sqrt{2}} \\ B=-\frac{1}{2} \\ C=-\frac{1}{2\sqrt{2}} \\ D=-\frac{1}{2} \end{cases}$$

$$=\frac{1}{4}\int\frac{\sqrt{2}x-4}{\left(x^2-\sqrt{2}x-1\right)}dx-\frac{1}{4}\int\frac{\sqrt{2}x+4}{\left(x^2+\sqrt{2}\,x-1\right)}dx=$$

$$=\frac{-\ln\left(x^2-\sqrt{2}x+1\right)+\ln\left(x^2+\sqrt{2}x+1\right)-2\arctan\left(1-\sqrt{2}x\right)+2\arctan\left(1+\sqrt{2}x\right)}{4\sqrt{2}}+c$$

Esempio 4

$$\int\frac{\sin^2 x}{\cos^3 x}dx=\int\frac{\sin^2 x}{\left(\cos x\right)^4}\cos x dx=\int\frac{\sin^2 x}{\left[\left(\cos x\right)^2\right]^2}\cos x dx=\int\frac{\sin^2 x}{\left[1-\sin^2 x\right]^2}\cos x dx$$

$$\sin x=t \;\Rightarrow\; \cos x\, dx=dt$$

$$\int\frac{t^2}{\left[1-t^2\right]^2}dt=\int\frac{t^2}{\left(1-t\right)^2\left(1+t\right)^2}dt=\int\frac{A}{1-t}+\frac{B}{1+t}+\frac{d}{dt}\left(\frac{Ct+D}{1-t^2}\right)dt=$$

$$\int\frac{A}{1-t}+\frac{B}{1+t}+\frac{C+Ct^2+2Dt}{\left(1-t^2\right)^2}dt=$$

$$\int\frac{\left(B-A\right)t^3+\left(-A-B+C\right)t^2+\left(A-B+2D\right)t+\left(A+B+C\right)}{\left(1-t^2\right)^2}dt=$$

$$\begin{cases} B-A=0 \\ -A-B+C=1 \\ A-B+2D=0 \\ A+B+C=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=-\frac{1}{4} \\ B=-\frac{1}{4} \\ C=\frac{1}{2} \\ D=0 \end{cases}$$

$$=\frac{1}{4}\left(\frac{2t}{1-t^2}+\ln\left|1-t\right|-\ln\left|t+1\right|\right)=\frac{1}{4}\left(\frac{2\sin x}{1-\sin^2 x}+\ln\left|1-\sin x\right|-\ln\left|\sin x+1\right|\right)+c$$

$$\int \sin^3 x \cos^3 x \, dx = \int \sin^3 x \cos^2 x \cos x \; dx = \int \sin^3 x \left(1 - \sin^2 x\right) \cos x \; dx =$$

$$= \int \left(\sin^3 x - \sin^5 x\right) \cos x \; dx = \frac{\sin^4 x}{4} - \frac{\sin^6 x}{6}$$

$$\int_{\sqrt{3}}^{4} \frac{1}{x\sqrt{x^2 - 3}} dx =$$

$$\sqrt{x^2 - 3} = t \Rightarrow x^2 = 3 + t^2 \Rightarrow x = \sqrt{3 + t^2} \Rightarrow dx = \frac{t}{\sqrt{3 + t^2}} dt$$

$$= \int_0^1 \frac{t}{t\sqrt{3+t^2}\,\sqrt{3+t^2}} dt = \int_0^1 \frac{1}{3+t^2} dt = \frac{1}{\sqrt{3}} \left[\arctan\left(\frac{t}{\sqrt{3}}\right) \right]_0^1 = \frac{\pi}{6\sqrt{3}}$$