CONVERGENZA DI INTEGRALI IMPROPRI

$f(x) \geq 0 \quad \forall x \in E$ (dove E è l'intervallo di integrazione)

DEFINIZIONE DI CONVERGENZA IN SENSO IMPROPRIO

1. Sia $I = (a,b]$ un intervallo tale che la funzione $f(x)$ risulta continua sull'intervallo e sia tale che $\lim_{x \to a} f(x) = \infty$, la funzione è integrabile in senso improprio se $\lim_{x \to a} \int_a^b f(x)\,dx$ esiste ed è finito.
2. Sia I non limitato superiormente o inferiormente, ad esempio $I = [a,+\infty)$, e sia $f(x)$ una funzione continua su tale intervallo, allora si dice integrabile in senso improprio se $\lim_{b \to +\infty} \int_a^b f(x)\,dx$ esiste ed è finito.

CONDIZIONE NECESSARIA ALLA CONVERGENZA

Un integrale del tipo $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ può convergere soltanto se $\lim_{x \to \infty} f(x) = 0$

CRITERIO DEL CONFRONTO

Se $0 \leq f(x) \leq g(x) \quad \forall x \in E \quad \Rightarrow \begin{cases} se \int_E f(x)dx = +\infty & \Rightarrow \int_E g(x)dx = +\infty \\ se \int_E g(x)dx < \infty & \Rightarrow \int_E f(x)dx < \infty \end{cases}$

CRITERIO DEL CONFRONTO ASINTOTICO

Se $\lim_{x \to \alpha} \frac{f(x)}{g(x)} = l \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ allora si può dire che:

$se \;\; l \neq 0 \;\; e \;\; l \neq \infty \;\; \Rightarrow \;\; f(x) \;\; e \;\; g(x) \;\; hanno\ lo\ stesso\ comportamento$

$$se\ \ l = 0 \qquad \Rightarrow\ se \int_E g(x)dx < \infty \quad \Rightarrow \int_E f(x)dx < \infty$$

$$se\ \ l = \infty \qquad \Rightarrow\ se \int_E g(x)dx = \infty \quad \Rightarrow \int_E f(x)dx = \infty$$

INTEGRALI PER CONFRONTO ASINTOTICO

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^\alpha}dx = \begin{cases} \infty & se\ \alpha \le 1 \\ < \infty & se\ \alpha > 1 \end{cases}$$

$$\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha}dx = \begin{cases} \infty & se\ \alpha \ge 1 \\ < \infty & se\ \alpha < 1 \end{cases}$$

$$\int_2^\infty \frac{1}{x\log^\alpha x}dx = \begin{cases} \infty & se\ \alpha < 1 \\ < \infty & se\ \alpha > 1 \end{cases}$$

$f(x)$ a segno variabile su E (dove E è l'intervallo di integrazione)

CRITERIO DI ASSOLUTA INTEGRABILITÀ

$$\int_E |f(x)|dx < \infty \quad \Rightarrow \quad \int_E f(x)dx \ < \infty$$

$\int_E |f(x)|dx = +\infty \ \Rightarrow$ non si può concludere niente sulla convergenza dell'integrale