INTEGRALI DEFINITI E INDEFINITI

PRIMITIVA DI UNA FUNZIONE

Per primitiva di una funzione f(x) continua, si intende una funzione $F(x)$ derivabile tale che $F'(x) = f(x)$

INTEGRALI INDEFINITI

$$\int f(x)\,dx = F(x) + c$$

L'integrale indefinito della funzione integranda f(x) è l'insieme di tutte le primitive di f(x)

INDEGRALI DEFINITI (se f(x) è continua e valgono le ipotesi del teorema fondamentale del calcolo integrale)

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

INTEGRALI IMMEDIATI DELLE FUNZIONI FONDAMENTALI

$$\int x^{\alpha}\,dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c \;\; con \;\; \alpha \neq -1$$

$$\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + c$$

$$\int e^x\,dx = e^x + c$$

$$\int \sin x\,dx = -\cos x + c$$

$$\int \cos x\,dx = \sin x + c$$

$$\int \frac{1}{\cos^2 x}\,dx = \int \left(1 + \tan^2 x\right) dx = \tan x + c$$

$$\int \frac{1}{\sin^2 x}\,dx = \int \left(1 + \cot^2 x\right) dx = -\cot x + c$$

$$\int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \arctan x + c$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \arcsin x + c$$

INTEGRALI SEMIMMMEDIATI

$$\int \left[f(x) \right]^{\alpha} f'(x) dx = \frac{\left[f(x) \right]^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c \; con \;\; \alpha \neq -1$$

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln \left| f(x) \right| + c$$

$$\int e^{f(x)} f'(x) dx = e^{f(x)} + c$$

$$\int \sin \left[f(x) \right] f'(x) dx = -\cos x + c$$

$$\int \cos \left[f(x) \right] f'(x) dx = \sin x + c$$

$$\int \frac{f'(x)}{\cos^2 f(x)} dx = \int \left(1 + \tan^2 \left[f(x) \right] \right) f'(x) dx = \tan f(x) + c$$

$$\int \frac{f'(x)}{\sin^2 \left[f(x) \right]} dx = \int \left(1 + \cot^2 \left[f(x) \right] \right) f'(x) dx = -\cot f(x) + c$$

$$\int \frac{f(x)}{1 + f(x)^2} dx = \arctan f(x) + c$$

$$\int \frac{f'(x)}{\sqrt{1 - \left[f(x) \right]^2}} dx = \arcsin x + c$$

PROPRIETA DELL'INTEGRALE

Siano f(x) e g(x) due funzioni integrabili sull'intervallo (a,c) e sia $a<b<c$. Consideriamo inoltre due numeri reali α e β. Allora:

$$(1)\quad \int_a^c f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx$$

$$(2)\quad \int_a^c \alpha f(x) + \beta g(x)\,dx = \alpha\int_a^c f(x)\,dx + \beta\int_b^c g(x)\,dx$$

INTEGRAZIONE PER PARTI

CASO INDEFINITO

$$\int f'(x)g(x)dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)dx$$

CASO DEFINITO

$$\int_a^b f'(x)g(x)dx = \left[f(x)g(x)\right]\Big|_a^b - \int_a^b f(x)g'(x)dx$$

INTEGRAZIONE PER SOSTITUZIONE

$$\int_a^b f(x)dx$$

Sostituzione: $t = g(x)$

PASSO 1

Ci sono due opzioni:

1. Invertire e poi derivare
   $x = g^{-1}(t) \quad \Rightarrow \quad dx = D\left[g^{-1}(t)\right]\ dt$
2. Derivare direttamente:
   $t = g(x) \quad \Rightarrow \quad dt = D\left[g(t)\right]\ dt$

PASSO 2

Sostituire nella funzione

$t \rightleftarrows g(x)$ e le $x \rightleftarrows g^{-1}(t)$

PASSO 3

Se l'integrale è definito cambio gli estremi di integrazione

$$x = a \quad \Rightarrow \quad t = g(a)$$
$$x = b \quad \Rightarrow \quad t = g(b)$$

Quindi ottengo:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f\left[g^{-1}(t)\right] \cdot D\left[g^{-1}(t)\right] dt$$

PRINCIPALI SOSTITUZIONI

Sia $R(t)$, una qualsiasi funzione razionale (rapporto di polinomi).

$$\int R(f(x))\,f'(x)\,dx$$

$$f(x)=t \quad \Rightarrow \quad f'(x)\,dx=dt$$

Sostituendo: $\int R(t)\,dt$

ESPONENZIALI

$$\int R\left(e^{\alpha x}\right)dx$$

$$e^{\alpha x}=t \quad \Rightarrow \quad \alpha x=\ln t \quad \Rightarrow \quad dx=\frac{1}{\alpha t}dt$$

Sostituendo: $\int R(t)\,\frac{1}{\alpha t}dt$

LOGARITMI

$$\int R(\ln x)\frac{1}{x}dx$$

$$\ln x=t \;\Rightarrow\; \frac{1}{x}dx=dt$$

Sostituendo: $\int R(t)\,dt$

POTENZE

$$\int R\left(x^{\alpha}\right)x^{\alpha-1}dx$$

$$x^{\alpha}=t \;\Rightarrow\; \alpha x^{\alpha-1}dx=dt \Rightarrow x^{\alpha-1}dx=\frac{1}{\alpha}dt$$

Sostituendo: $\frac{1}{\alpha}\int R(t)\,dt$

RADICI DI POLINOMI DI PRIMO GRADO

$$\int R\left(\sqrt{ax+b},x\right)dx$$

$$\sqrt{ax+b}=t \quad \Rightarrow ax+b=t^{2} \Rightarrow x=\frac{t^{2}-b}{a} \Rightarrow \; dx=\frac{2t}{a}dt$$

Sostituendo: $\int R\left(t,\frac{t^2-b}{a}\right)\frac{2t}{a}dt$

INTEGRALI IN SENO, COSENO E TANGENTE

SOSTITUZIONE 1

$$\int R(\sin x)\cos x\,dx$$

Porre: $\sin x = t \Rightarrow \cos x dx = dt$

Sostituendo: $\int R(t)\,dt$

$$\int R(\cos x)\sin x\,dx$$

Porre: $\cos x = t \Rightarrow -\sin x dx = dt$

Sostituendo: $-\int R(t)\,dt$

SOSTITUZIONE 2

$$\int R(\sin x,\cos x)\,dx$$

Parametrizzazione di seno e coseno:

$$\sin x = \frac{2t}{t^2+1} \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2} \quad \tan\left(\frac{x}{2}\right) = t \quad \Rightarrow \quad dx = \frac{2}{1+t^2}dt$$

Sostituendo: $\int R\left(\frac{2t}{t^2+1},\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)\frac{2}{1+t^2}dt$

SOSTITUZIONE 3

$$\int R\left(\tan x,\sin^2 x,\cos^2 x\right)dx$$

$$\tan x = t \Rightarrow x = \arctan t \Rightarrow dx = \frac{1}{1+t^2}$$

$$\cos^2 x = \frac{1}{1+t^2}, \quad \sin^2 x = \frac{t^2}{1+t^2}$$

Sostituendo: $\int R\left(\mathrm{t},\frac{t^2}{1+t^2},\frac{1}{1+t^2}\right)\frac{1}{1+t^2}dt$

ALCUNI INTEGRALI COMODI DA TENERE SOTTO MANO

$$\int \sin^2 x\, dx = \frac{x}{2} - \frac{1}{4}\sin 2x$$

$$\int \cos^2 x\, dx = \frac{x}{2} + \frac{1}{4}\sin 2x$$

$$\int \tan x = -\ln\left|\cos x\right| + c$$

$$\int \cot x = \ln\left|\sin x\right| + c$$

$$\int \frac{1}{\sin x} dx = \ln\left|\tan\frac{x}{2}\right| + c$$

$$\int \frac{1}{\cos x} dx = \ln\left|\tan\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right| + c$$

$$\int \sqrt{x^2 \pm a^2}\, dx = \frac{1}{2}\left(x\sqrt{a^2 \pm x^2} \pm a^2 \ln\left(\sqrt{x^2 \pm a^2} + x\right)\right) + c$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} dx = \ln\left(\sqrt{x^2 \pm a^2} + x\right) + c$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx = \arctan\left(\frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}}\right) + c$$

$$\int \frac{1}{a + x^2} dx = \frac{1}{\sqrt{a}} \arctan\frac{x}{\sqrt{a}} + c$$

$$\int a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0\;\; dx = a_n \frac{x^{n+1}}{n+1} + a_{n-1}\frac{x^n}{n} + .. + a_1\frac{x^2}{2} + a_0 x$$

$$\int \frac{A}{ax+b} dx = \frac{A\ln\left|ax+b\right|}{a}$$

$$\int \frac{Ax+B}{ax^2+bx+c} dx = \frac{A}{2a}\ln\left|ax^2+bx+c\right| + \frac{2aB-bA}{a\sqrt{-\Delta}}\arctan\left(\frac{2ax+b}{\sqrt{-\Delta}}\right) + k \qquad se \quad \Delta < 0$$

$$\int \frac{B}{ax^2+bx+c} dx = \frac{2aB}{a\sqrt{-\Delta}}\arctan\left(\frac{2ax+b}{\sqrt{-\Delta}}\right) + k$$

$$\int \frac{Ax+B}{ax^2+c} dx = \frac{A}{2a}\ln\left|ax^2+c\right| + \frac{B}{\sqrt{ac}}\arctan\left(\sqrt{\frac{a}{c}}\; x\right) + k$$

$$\int \frac{1}{(ax+b)^n}\,dx = -\frac{1}{n-1}\,\frac{1}{a(ax+b)^{n-1}}$$