LIMITI

FORME INDETERMINATE

$$\left\{\frac{0}{0},\ \frac{\infty}{\infty},\ +\infty-\infty,\ \infty\cdot 0,\ 0^0,\ \infty^0,\ 1^\infty\right\}$$

IL SIMBOLO DI ASINTOTICO

Siano f(x) e g(x) due funzioni che ammettono limite nullo o infinito per $x \to x_0$ si ha che se $\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=1$ allora $f(x)\underset{x\to x_0}{\sim} g(x)$ e si dice che f(x) è asintoticamente equivalente a g(x) se $x \to x_0$.

Più in generale possiamo scrivere la seguente implicazione:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\alpha\in\mathbb{R}\ ,\ \alpha\neq 0 \quad\Rightarrow\quad f(x)\underset{x\to x_0}{\sim}\alpha\, g(x)$$

TEOREMA DI DE L'HOPITAL

Siano $f(x)$ e $g(x)$ due funzioni continue e derivabili su un intervallo finito (a,b). Se $\lim_{x\to a^+}\frac{f(x)}{g(x)}$ è una forma indeterminata del tipo $\frac{0}{0}$ oppure $\frac{\infty}{\infty}$, $g'(x)\neq 0\ \forall x\in(a,b)$ e $\frac{f'(x)}{g'(x)}$ ammette limite (finito o infinito per $x\to a^+$ allora $\lim_{x\to a^+}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a^+}\frac{f'(x)}{g'(x)}$.

IL CONCETTO DI o-PICCOLO

Siano $f(x)$ e $g(x)$ due funzioni finite o infinitesime per $x\to x_0$ tali che $\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=0$ allora possiamo scrivere che $g(x)=o(f(x))$ per $x\to x_0$ (g(x) è un o-piccolo di f(x) per $x\to x_0$, ovvero è infinitamente più piccola)

PRINCIPALI LIMITI NOTEVOLI

LIMITE DI NEPERO

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=e$$

DERIVATI DAL LIMITE DI NEPERO

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1 \qquad \Rightarrow \qquad \ln(1+x)\underset{x\to 0}{\sim} x$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{x}-1}{x}=1 \qquad \Rightarrow \qquad e^{x}\underset{x\to 0}{\sim} 1+x$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^{\alpha}-1}{x}=\alpha \qquad \Rightarrow \qquad (1+x)^{\alpha}\underset{x\to 0}{\sim} 1+\alpha x$$

LIMITI GONIOMETRICI

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1 \qquad \Rightarrow \qquad \sin x\underset{x\to 0}{\sim} x$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}=1 \qquad \Rightarrow \qquad \tan x\underset{x\to 0}{\sim} x$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x}=0$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^{2}}=\frac{1}{2} \qquad \Rightarrow \qquad \cos x\underset{x\to 0}{\sim} 1-\frac{x^{2}}{2}$$

SVILUPPI DI MC LAURIN

$$e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} x^n = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + o\left(x^3\right)$$

$$\sin x = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{1}{(2n+1)!} x^{2n+1} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + o\left(x^5\right)$$

$$\cos x = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{1}{(2n)!} x^{2n} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + o\left(x^4\right)$$

$$\tan x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \frac{17x^7}{315} + \frac{62x^9}{2835} + o(x^9)$$

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n} x^n = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o\left(x^3\right)$$

$$(1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{\alpha}{n} x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\cdot\ldots\cdot(\alpha-n+1)}{n!} x^n = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2} x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!} x^3 + o\left(x^3\right)$$

$$\arctan(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + o\left(x^5\right)$$

$$\arcsin x = x + \frac{x^3}{6} + \frac{3x^5}{40} + \frac{5x^7}{122} + \frac{35x^9}{1152} + o\left(x^9\right)$$

$$\arccos x = \frac{\pi}{2} x - \frac{x^3}{6} - \frac{3x^5}{40} - \frac{5x^7}{122} - \frac{35x^9}{1152} + o\left(x^9\right)$$

$$\sinh(x) = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + o\left(x^5\right)$$

$$\cosh x = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + o\left(x^4\right)$$

$$\tanh^{-1} x = 1 + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + o\left(x^5\right)$$

$$\sinh^{-1} x = x - \frac{x^3}{6} + \frac{3x^5}{40} - \frac{5x^7}{122} + \frac{35x^9}{1152} + o\left(x^9\right)$$

ORDINI DI INFINITO E INFINITESIMI (APPROSSIMAZIONI ASINTOTICHE)

CONFRONTO DI INFINITI

Gli esponenziali battono le potenze:

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{n^\alpha}{a^n}=0 \quad \forall\alpha>0\ \forall a>1 \quad \Rightarrow \quad n^\alpha+a^n \underset{n\to+\infty}{\sim} a^n \quad \Rightarrow \quad n^\alpha=o\left(a^n\right)$$

Le potenze battono i logaritmi:

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\ln n}{n^\alpha}=0 \quad \forall\alpha>0 \quad \Rightarrow \ln n+n^\alpha \underset{n\to+\infty}{\sim} n^\alpha \quad \Rightarrow \quad \ln n=o\left(n^\alpha\right)$$

I fattoriali battono le potenze:

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{a^n}{n!}=0 \quad \Rightarrow \quad a^n+n! \underset{n\to+\infty}{\sim} n! \quad \Rightarrow \quad a^n=o(n!)$$

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{n!}{n^n}=0 \quad \Rightarrow \quad n^n+n! \underset{n\to+\infty}{\sim} n^n \quad \Rightarrow \quad n!=o\left(n^n\right)$$

Tra due potenze vince chi ha l'esponente più grande:

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{n^\alpha}{n^\beta}=0 \quad \forall\beta>\alpha>0 \quad \Rightarrow \quad n^\beta+n^\alpha \underset{n\to+\infty}{\sim} n^\beta \quad \Rightarrow \quad n^\alpha=o\left(n^\beta\right)$$

Tra due esponenziali vince chi ha l'esponente più grande:

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\alpha^n}{\beta^n}=0 \quad \forall\beta>\alpha>1 \Rightarrow \beta^n+\alpha^n \underset{n\to+\infty}{\sim} \beta^n$$

Tra due logaritmo vince chi ha la base più piccola:

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\log_\beta n}{\log_\alpha n}=0 \quad \forall\beta>\alpha>1 \Rightarrow \beta^n+\alpha^n \underset{n\to+\infty}{\sim} \beta^n$$

$$\log_b\left(a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x+a_0\right)\sim n\log_b(x)$$

$$\log_b\left(c^n\right)\sim n\log_b(c)$$

$$\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{n^\alpha}=1 \quad \forall\alpha\in\mathbb{R}$$

$$\lim_{x\to0}\ x^\alpha\ln x=0$$

FORMULA DI STIRLING (APPROSSIMAZIONE ASINTOTICA PER IL FATTORIALE)

$$n! \sim \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$$

CONFRONTO DI INFINITESIMI

Tra due potenze vince chi ha l'esponente più piccolo:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^\beta}{x^\alpha}=0 \quad \forall \beta>\alpha>0 \quad \Rightarrow x^\beta + x^\alpha \underset{x\to 0}{\sim} x^\alpha$$

$$\frac{1}{\beta^n}+\frac{1}{\alpha^n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{\alpha^n} \quad \forall \beta>\alpha>1$$

In generale se

$$\lim_{x\to\beta}\frac{f(x)}{g(x)}=0,\ con\ \lim_{x\to\beta} f(x)=\lim_{x\to\beta} g(x)=+\infty \quad \Rightarrow \begin{cases} f(x)+g(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} g(x) \\ \dfrac{1}{f(x)}+\dfrac{1}{g(x)} \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{f(x)} \end{cases}$$

Cioè se una funzione va a infinito più velocemente, anche il suo reciproco va a zero più velocemente.

Tra funzioni che tendono ad infinito contano gli infiniti più grandi, tra funzioni che tendono a zero contano infinitesimi più piccoli.

ASINTOTI DI UNA FUNZIONE

1. ASINTOTI VERTICALI

La retta $x = a$ è un asintoto verticale se almeno uno dei due limiti (destro o sinistro) vale infinito.

$$\lim_{x \to a^{\pm}} f(x) = \pm\infty$$

Se entrambi i limiti sono infiniti (sia destro che sinistro) allora si chiama asintoto **bilatero**. Altrimenti si chiama asintoto **monolatero.**

2. ASINTOTI ORIZZONTALI

La retta $y = l$ è un asintoto orizzontale se è verificata almeno una delle seguenti condizioni:

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = l$ oppure $\lim_{x \to -\infty} f(x) = l$

Se il limite per $x \to +\infty$ ha lo stesso valore del limite per $x \to -\infty$ allora la retta $y = l$ è un asintoto orizzontale **bilatero**, altrimenti è un asintoto **monolatero**.

3. ASINTOTI OBLIQUI

Si ha asintoto obliquo se è verificata la seguente condizione:

$$\exists m, q \in \mathbb{R} \quad m \neq 0$$
$$\lim_{x \to \pm\infty} \left[f(x) - (mx + q) \right] = 0$$

In tal caso per $x \to \pm\infty$ la funzione si comporta come la retta $y = mx + q$.

La condizione necessaria affinché esista asintoto obliquo è che il $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \pm\infty$

La condizione sufficiente invece è che:

$$\exists m = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x}, \; m \in \mathbb{R}, \; m \neq 0$$

$$\exists q = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x}, \; q \in \mathbb{R}$$