

SERIE

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + \dots$ dove $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ è una successione.

Sia $s_k = \sum_{n=0}^k a_n$ si ha che $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \lim_{k \rightarrow \infty} s_k$

SERIE GEOMETRICA

$$\sum_{n=0}^{\infty} a^n = \begin{cases} \frac{1}{1-a} & \text{se } |a| < 1 \\ +\infty & \text{se } a \geq 1 \\ \text{non esiste} & \text{se } a \leq -1 \end{cases}$$

CONDIZIONE NECESSARIA ALLA CONVERGENZA

Se $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ allora la serie può convergere, se questo limite non fa zero allora la serie non può convergere

CRITERI DI CONVERGENZA PER SERIE A TERMINI POSITIVI

CRITERIO DEL CONFRONTO

$$\text{Se } 0 \leq a_n \leq b_n \quad \forall n > \bar{n} \Rightarrow \begin{cases} \text{se } \sum a_n = +\infty \Rightarrow \sum b_n = +\infty \\ \text{se } \sum b_n < +\infty \Rightarrow \sum a_n < +\infty \\ \text{Negli Altri casi ???} \end{cases}$$

Esempio

Si vuole valutare il carattere della serie $\sum \frac{\cos n}{n^2}$

Basta osservare che $\frac{\cos n}{n^2} \leq \frac{1}{n^2} \quad \forall n \in \mathbb{N}$, e che $\sum \frac{1}{n^2}$ è la serie armonica generalizzata con $\alpha = 2$ quindi converge

CRITERIO DEL CONFRONTO ASINTOTICO

Se $a_n \geq 0$ e $b_n \geq 0 \quad \forall n > \bar{n}$

$$\frac{a_n}{b_n} \rightarrow l \in \mathbb{R} \cup +\infty \Rightarrow \begin{cases} \text{Se } l \neq 0 \text{ e } l \neq \infty \Rightarrow \sum a_n \text{ e } \sum b_n \text{ hanno lo stesso comportamento} \\ \text{Se } l = 0 \Rightarrow \begin{cases} \text{Se } \sum b_n = \infty \Rightarrow \text{non si può dire niente} \\ \text{Se } \sum b_n < \infty \Rightarrow \sum a_n < \infty \end{cases} \\ \text{Se } l = \infty \Rightarrow \begin{cases} \text{Se } \sum b_n < \infty \Rightarrow \text{non si può dire niente} \\ \text{Se } \sum b_n = \infty \Rightarrow \sum a_n = \infty \end{cases} \end{cases}$$

SERIE NOTE PER IL CONFRONTO ASINTOTICO

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}} = \begin{cases} < \infty & \text{se } \alpha > 1 \\ +\infty & \text{se } \alpha \leq 1 \end{cases}$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\log n)^{\alpha}} = \begin{cases} < \infty & \text{se } \alpha > 1 \\ +\infty & \text{se } \alpha \leq 1 \end{cases}$$

CRITERIO DELLA RADICE

$$\text{Se } \sqrt[n]{a_n} \rightarrow \beta \in \mathbb{R} \cup +\infty \Rightarrow \begin{cases} \text{se } |\beta| > 1 \Rightarrow \sum a_n = +\infty \\ \text{se } |\beta| < 1 \Rightarrow \sum a_n < \infty \\ \text{se } |\beta| = 1 \Rightarrow \text{non si può concludere nulla!} \end{cases}$$

CRITERIO DEL RAPPORTO

$$\text{Se } \frac{a_{n+1}}{a_n} \rightarrow \beta \in \mathbb{R} \cup +\infty \Rightarrow \begin{cases} \text{se } |\beta| > 1 \Rightarrow \sum a_n = +\infty \\ \text{se } |\beta| < 1 \Rightarrow \sum a_n < \infty \\ \text{se } |\beta| = 1 \Rightarrow \text{non si può concludere nulla!} \end{cases}$$

CRITERIO DI CONDENSAZIONE

La serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge se e solo se converge la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} 2^n a_{2^n}$

CRITERI DI CONVERGENZA PER SERIE A SEGNI ALTERNI

CRITERIO DELL'ASSOLUTA CONVERGENZA

$$\begin{cases} \text{se } \sum |a_n| < \infty \Rightarrow \sum a_n < \infty \\ \text{se } \sum |a_n| > \infty \Rightarrow \text{non si può concludere nulla} \end{cases}$$

SERIE DI LEIBENITZ

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \alpha_n$$

Converge se:

(i) $\alpha_n \geq 0 \quad \forall n > n_1$

(ii) $\alpha_n \rightarrow 0$

(iii) $\alpha_{n+1} \leq \alpha_n \quad \forall n > n_2$ (*successione debolmente decrescente*)

La seconda condizione corrisponde alla condizione necessaria e quindi se non è verificata la serie diverge. Se le altre due non sono verificate allora non si può concludere nulla.

