SUCCESSIONI

"Definitivamente" per una successione significa **"da un certo k in poi" (** $\exists k \in \mathbb{N}$ **tale che quella condizione è vera** $\forall n \geq k$ **, in altri termini basta scrivere** $n \to +\infty$ **)**

Scrivere $a_n \to l$ **è lo stesso che scrivere** $\lim_{n\to+\infty} a_n = l$ visto che l'unico limite che ha senso per le successioni è il limite per n che tende a infinito.

TEOREMA DEL CONFRONTO

- **TEOREMA DEL CONFRONTO (TRA DUE SUCCESSIONI)**

Se $a_n \leq b_n$ definitivamente $\Rightarrow \begin{cases} se \;\; a_n \to \infty \;\; \Rightarrow \;\; b_n \to \infty \\ se \;\; b_n \to -\infty \Rightarrow \;\; a_n \to -\infty \end{cases}$

- **TEOREMA DEI CARABINIERI (CONFRONTO TRA TRE SUCCESSIONI)**

Se $a_n \leq b_n \leq c_n \quad se \;\; a_n \to l \;\; e \;\; c_n \to l \quad \Rightarrow \;\; b_n \to l$

TEOREMA DELLA PERMANENZA DEL SEGNO

Se $a_n \to l > 0$ allora $a_n > 0$ definitivamente

Se $a_n \to l < 0$ allora $a_n < 0$ definitivamente

SUCCESSIONI ASINTOTICAMENTE EQUIVALENTI

a_n e b_n si dicono asintoticamente equivalenti e si scrive $a_n \sim b_n$ se entrambi le successioni ammettono limite e il limite del rapporto fa uno.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 1$$

CRITERIO DELLA RADICE

$$\sqrt[n]{a_n} \to l \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\} \quad \Rightarrow \begin{cases} se \; l > 1 \quad \Rightarrow \quad a_n \to \infty \\ se \; l < 1 \quad \Rightarrow \quad a_n \to 0 \\ se \;\; l = 1 \quad \Rightarrow \quad il\, criterio\, è\, inefficace \end{cases}$$

CRITERIO DEL RAPPORTO

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \to l \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\} \quad \Rightarrow \begin{cases} se\ l > 1 & \Rightarrow \quad a_n \to \infty \\ se\ l < 1 & \Rightarrow \quad a_n \to 0 \\ se\ \ l = 1 & \Rightarrow \quad il\, criterio\, è\, inefficace \end{cases}$$

CRITERIO DEL RAPPORTO-RADICE

Se $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$ e $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}$ esistono entrambi, allora sono equivalenti

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \to l \quad \Leftrightarrow \quad \sqrt[n]{a_n} \to l$$

FORMULA DI STIRLING (approssimazione asintotica del fattoriale)

$$n! \underset{n\to+\infty}{\sim} n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n}$$