RIPETIZIONI DI ANALISI MATEMATICA

Sei alle prese con un esame di Analisi Matematica, **hai provato diversi insegnanti e continui a non superare l'esame 😱?** Sei nel posto giusto 😃!

Finalmente hai trovato l'insegnante che fa per te e **voglio usare la matematica per dimostrartelo** 😳, ma prima ti lascio il mio contatto, così in caso ne avessi bisogno potrai contattarmi.

*Mi chiamo **Marco**, sono un **professore di matematica**, ho una lunga esperienza accademica pregressa (laurea completa in ingegneria a pieni voti e ricercatore scientifico) e il mio recapito telefonico/WhatsApp è +39 **3510868895** ☎.*

Ecco appunto, per convincerti che sono l'insegnante adatto al tuo caso, **ti propongo una serie numerica**:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{4^n}.$$

Quello che ti propongo è di discuterla, ma prima di farlo ti do una soluzione, che senza dubbio è una **soluzione brillante** e forse la conosci già 😒:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{4^n} = \frac{1}{4} + \frac{2}{4^2} + \frac{3}{4^3} + \frac{4}{5^3} + \dots = \frac{1}{4} + \frac{1+1}{4^2} + \frac{1+2}{4^3} + \frac{1+3}{5^3} + \dots$$

$$= \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{4^3} + \frac{1}{5^3} + \dots + \frac{1}{4^2} + \frac{2}{4^3} + \frac{3}{5^3} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{4^n} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{4^{n+1}} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{4^n} + \frac{1}{4} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{4^n}$$

Se pongo $A = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{4^n}$ ottengo l'equazione

$$A = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{4^n} + \frac{1}{4} A$$

Ora faccio dei passaggi algebrici per cercare di isolare una serie geometrica

$$\frac{3}{4} A = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{4^n} = \frac{1}{4^0} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{4^n} - \frac{1}{4^0} = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^n - 1$$

A questo punto utilizzo una serie notevole, che è quella geometrica $\sum_{n=0}^{+\infty} q^n = \frac{1}{1-q}$

$$\frac{3}{4} A = \frac{1}{1-\frac{1}{4}} - 1 = \frac{1}{3}$$

E quindi $A=\frac{4}{3}\cdot\frac{1}{3}\Rightarrow\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n}{4^n}=\frac{4}{9}$

Siamo arrivati alla soluzione e non sarebbe certo stato facile arrivarci😤😳! Ma la domanda è: questa soluzione **è accettabile per un professore universitario che corregge il tuo compito🤔?**

La risposta è: **dipende da chi lo corregge**! Io nelle mie lezioni posso insegnarti tanti trucchi come questo💪, per risolvere esercizi, ma talvolta arrivare ad una soluzione con intuito e abilità di ragionamento logico non è sufficiente. Infatti, noi in questi passaggi senza volerlo **abbiamo dato per scontato tante cose**, e soprattutto **aspetti teorici**, che per alcuni professori hanno la loro importanza!

Quando il professore ti chiede di **giustificare i passaggi** è perché questi non hanno senso se non provi a spiegare perché sono matematicamente validi. Non posso usare un teorema o un'espressione matematica se prima non verifico che le ipotesi che li rendono veritieri, sono rispettate.

Ad esempio, quando ho usato la serie geometrica, dovevo specificare che quella formula $\sum_{n=0}^{+\infty}q^n=\frac{1}{1-q}$ **vale solo per** $|q|<1$ e non per qualsiasi valore di q. Se infatti questa condizione non era verificata allora la serie non sarebbe stata convergente e questa formula non avrebbe avuto senso😣.

Un altro aspetto che avrei dovuto discutere, ancora prima di provare a cercare il risultato della serie era la questione della convergenza. **Avrei dovuto chiedermi😳 se si trattasse o meno di una serie convergente**, perché se non lo era, non avrebbe avuto senso nemmeno provare a calcolarne il risultato numerico!

Per affrontare questa questione posso semplicemente notare che si tratta di una serie numerica, e quindi posso appellarmi ad uno dei teoremi sulla convergenza delle serie numeriche.

Per prima cosa, noto che $\lim_{n\to+\infty}\frac{n}{4^n}=0$ (è una forma indeterminata $\frac{\infty}{\infty}$, ma il denominatore "vince" rispetto al numeratore, trattandosi di un esponenziale a confronto con una potenza), ma questa osservazione non mi basta per trarre conclusione sulla convergenza della serie, perché questa è solo una condizione necessaria, e non sufficiente per concludere che la serie è convergente.

Serve una condizione sufficiente, come ad esempio il **criterio del rapporto**: se dimostro che $\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=l$ e che $l<1$ allora sicuramente si tratta di una serie convergente. Verifichiamolo: $\lim_{n\to+\infty}\frac{n+1}{n}\cdot\frac{2^n}{2^{n+1}}=\frac{1}{2}<1$.

Dunque, si tratta di una serie convergente 😀!

A questo punto tutte le questioni teoriche sono state affrontate e anche il professore più pignolo non avrebbe nulla che gli farebbe storcere il naso leggendo il mio svolgimento 🙃😊😍💪😳!

RIPETIZIONI DI ANALISI MATEMATICA AVANZATA

A questo punto proviamo a risolverla di nuovo e **proviamo ad uscire dai concetti base dell'analisi matematica** (quelli che si studiano per intenderci in "**analisi matematica 1**" o "**analisi matematica A**") e spingiamoci verso concetti teoricamente più avanzati, come quelli che si introducono spesso in una materia che nelle varie facoltà di ingegneria prende il nome di "**analisi matematica 2**", o "**analisi matematica B**".

Chiamiamo in causa le **successioni e serie di funzioni**:

Partiamo dalla successione di funzione $f_n(x) = 4^{-n \cdot x}$ da cui ricaviamo la serie di funzioni

$$\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} 4^{-nx} - 1 = \frac{1}{1-4^{-x}} - 1 \ .$$

A questo punto deriviamo entrambi i membri dell'equazione e seguiamo una serie di passaggi algebrici.

$$\frac{\partial}{\partial x}\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\partial}{\partial x} 4^{-nx} = -\sum_{n=1}^{+\infty} n \ln 4 \cdot 4^{-nx} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{1-4^{-x}} - 1\right)$$

$$-\ln 4 \sum_{n=1}^{+\infty} n \cdot 4^{-nx} = -\frac{\ln 4 \cdot 4^{-x}}{\left(1-4^{-x}\right)^2}$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n \cdot 4^{-nx} = \frac{4^{-x}}{\left(1-4^{-x}\right)^2}$$

A questo punto basta porre $x = 1$, $\sum_{n=1}^{+\infty} n \cdot 4^{-n} = \frac{4^{-1}}{\left(1-4^{-1}\right)^2} = \frac{4}{9}$ e voilà siamo giunti alla soluzione 😳!

Anche in questo caso, molto abilmente, **siamo giunti alla stessa soluzione**!

Ma **ci siamo dimenticati di discutere qualche aspetto teorico**🤔**?** Se il professore di matematica che corregge il compito si accontenta del fatto che lo studente giunga alla soluzione, allora senza dubbio questo esercizio passa con punteggio massimo, perché il risultato è corretto e **non ci sono errori di calcolo**!

Ma se invece si trattasse di un **professore pignolo**, allora si aspetterebbe da te che ogni passaggio venisse argomentato.

Allora, **passiamo alle questioni teoriche e vediamo cosa ho omesso nella soluzione**. La prima questione che non ho affrontato è la **convergenza**, e trattandosi di serie di funzioni e non di semplici serie numeriche, mi chiedo se posso accontentarmi della **convergenza puntuale**, o mi serve una condizione più forte, come ad esempio la **convergenza uniforme**🤔.

Siccome devo derivare entrambi i membri, allora significa che sto facendo uso del **teorema del passaggio del segno della derivata sotto il segno di sommatoria**, e quindi non è sufficiente la convergenza puntuale, devo dimostrare che esiste un intervallo che contiene $x=1$ al suo interno (non al bordo🙄!) in cui la serie converge uniformemente, altrimenti lo svolgimento che ho proposto non sarebbe valido😟.

La serie in questione è $\sum_{n=0}^{+\infty} 4^{-nx}$. La successione 4^{-nx} è monotona decrescente per ogni $x \in \mathbb{R}$ e per ogni $n \in \mathbb{N}$, quindi ad esempio se $x \geq \frac{1}{2}$ allora la successione ammette massimo e quindi estremo superiore proprio in $x = \frac{1}{2}$ e di conseguenza se prendo l'intervallo $I = \left[\frac{1}{2}, +\infty\right)$ posso scrivere $M_n = \sup_{x \in I} 4^{-nx} = \frac{1}{2^n}$, e poiché $\sum_{n=0}^{+\infty} M_n$ è convergente (serie geometrica di ragione minore di uno in modulo) allora la serie **converge addirittura totalmente** in I e quindi sicuramente converge anche **uniformemente**.

Ora che ho chiarito che la successione converge uniformemente in I e che $x=1$ è un punto che si trova all'interno dell'intervallo, allora **la soluzione che ho proposto non è più attaccabile**, **perché tutti i teoremi che ho usato, rispettano le ipotesi di validità** 🙃😊😍💪🤓.

ANALISI COMPLESSA 😱😲🤓

Per finire voglio proporti una soluzione ancora più avanzata, scomodando l'**analisi complessa** e l'**analisi funzionale**: La **trasformata zeta**, è una trasformata che si applica nell'ambito dell'analisi complessa e in ambito ingegneristico per l'**analisi di segnali numerici** nella **teoria dei segnali**. Essa era già nota concettualmente a Laplace ed esiste un legame dimostrabile con la **trasformata di Laplace**. In ogni caso questo tipo di trasformata ha attratto l'interesse da un punto di vista matematico, e in particolare nella matematica discreta a partire dal 1947, quando alla Columbia University di New York, fu proposta come **metodo di risoluzione di equazioni alle differenze lineari a coefficienti costanti**.

In analisi funzionale, la trasformata zeta di una successione x_n è definita come $X(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_n \cdot z^{-n}$ dove $z \in \mathbb{C}$. In particolare, la trasformata zeta della successione $y_n = \begin{cases} n, & n \geq 0 \\ 0, & n < 0 \end{cases}$ rientra tra le trasformate notevoli e vale $Y(z) = \frac{z^{-1}}{\left(1 - z^{-1}\right)^2}$, e la sua regione di convergenza è dato dall'insieme di numeri complessi definito da $ROC = \{z \in \mathbb{C} : |z| > 1\}$. Ma se si osserva che la trasformata

$Y(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} y_n \cdot z^{-n} = \sum_{n=0}^{+\infty} n \cdot z^{-n} = \sum_{n=1}^{+\infty} n \cdot z^{-n}$ e che posto $z = 4$ (punto appartenente alla regione di convergenza della trasformata) si ottiene proprio la serie in esame allora

$$Y(4) = \sum_{n=1}^{+\infty} n \cdot 4^{-n} = \frac{4^{-1}}{(1-4^{-1})^2} = \frac{4}{9}$$

E cioè, Il risultato della serie numerica non è altro che la trasformata zeta della successione y_n calcolata nel punto $z = 4$ 🙃😊😍💪😳.