MATEMATICA PER PRECORSI

© Ing. Casparriello Marco - www.marcocasparriello.it

ALGEBRA DI BASE

1. **Definizione di polinomio.** Un polinomio è una scrittura del tipo
$$p(x)=a_n x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1 x+a_0$$
2. **Coefficienti di un polinomio.** Gli a_i sono detti i coefficienti del polinomio. A seconda dell'insieme numerico a cui appartengono gli a_i, il polinomio p(x) si dice a coefficienti interi, razionali, reali, complessi. Il coefficiente a_0 viene di solito detto termine noto di p(x).
3. **Polinomio monico.** Un polinomio si dice monico se $a_1=1$
4. **Funzione polinomiale.** Si dice funzione polinomiale la funzione che ad ogni numero α associa il valore p(α), ottenuto mettendo α al posto della x e svolgendo le operazioni algebriche. Si noti che p(0) è sempre il termine noto del polinomio, mentre p(1) è la somma algebrica di tutti i coefficienti.
5. **Principio di identità dei polinomi.** Siano p(x) e q(x) due polinomi. Se le funzioni polinomiali a loro associate coincidono, cioè se p(α) = q(α) per ogni α, allora i due polinomicoincidono, cioè hanno gli stessi coefficienti. In particolare due polinomi dello stesso grado si possono uguagliare uguagliando tutti i coefficienti dello stesso grado.
$$p(x)=q(x)\ \Rightarrow\ \alpha_n x^n+\alpha_{n-1}x^{n-1}+\ldots+\alpha_1 x+\alpha_0=\beta_n x^n+\beta_{n-1}x^{n-1}+\ldots+\beta_1 x+\beta_0\ \Rightarrow\ \begin{cases}\alpha_n=\beta_n\\ \vdots\\ \alpha_0=\beta_0\end{cases}$$
6. **Grado di un polinomio.** Si dice grado di un polinomio il più grande intero *i* tale che $a_i\neq 0$ Per il polinomio nullo (quello in cui tutti i coefficienti sono zero) non definiamo il grado. Il grado di un polinomio p(x) si indica di solito con la notazione $\deg\left[p(x)\right]$ che è un'abbreviazione dell'inglese "degree".
7. **Polinomi costanti.** Le costanti possono essere considerate come casi particolari di polinomio(di grado 0 se la costante non è nulla).
8. **Somma e prodotto di polinomi.** Due polinomi si possono sommare o moltiplicare tra di loronel modo usuale. In particolare è possibile moltiplicare un polinomio per una costante. Dallasomma e prodotto discendono anche la sottrazione (si tratta di sommare al primo polinomioil secondo moltiplicato per la costante −1) e l'elevamento ad una potenza k intera positiva (sitratta di un prodotto di k fattori uguali).
9. **Comportamento del grado rispetto alla somma e al prodotto.** Siano p(x) e q(x) duepolinomi. Allora
$$\deg\left(p(x)+q(x)\right)\leq\max\left\{\deg\left(p(x)\right)+\deg\left(q(x)\right)\right\}$$
$$\deg\left(p(x)\cdot q(x)\right)=\deg\left(p(x)\right)+\deg\left(q(x)\right)$$
10. **DIVISIONE EUCLIDEA.** Siano $a(x)$ e $b(x)$ due polinomi, con $\deg\left(p(x)\right)>0$. Allora esistono (e sono unici) due polinomi $q(x)$ e $r(x)$ tali che:
    - $b(x)=a(x)\cdot q(x)+r(x)$
    - $r(x)=0$, oppure $\deg\left(r(x)\right)<\deg\left(a(x)\right)$

Questa si chiama divisione euclidea, o divisione con resto. In tal caso $b(x)$ si chiama **dividendo**, $a(x)$ si chiama **divisore**, $q(x)$ si chiama **quoziente** e $r(x)$ si chiama **resto**. Per arrivare a questa forma bisogna fare la divisione tra polinomi.

$$\begin{array}{rrrrrr|lll}
x^5 & & & & +2x & -3 & x^3 & +x^2 & -1 \\
-x^5 & -x^4 & & +x^2 & & & x^2 & -x & +1 \\
\hline
= & -x^4 & & +x^2 & +2x & -3 & & & \\
 & +x^4 & +x^3 & & -x & & & & \\
\hline
 & = & +x^3 & +x^2 & +x & -3 & & & \\
 & & -x^3 & -x^2 & & +1 & & & \\
\hline
 & & = & = & +x & -2 & & &
\end{array}$$

11. **DIVISIBILITA'**: se $r(x)=0$ si dice che il polinomio $b(x)$ è divisibile per $a(x)$.
12. **MASSIMO COMUNE DIVISORE:** Definizione di massimo comun divisore. Siano a(x) e b(x) due polinomi. Si dice massimocomun divisore di a(x) e b(x) un polinomio di grado massimo tra quelli che dividono sia a(x), sia b(x).

RADICI E FATTORIZZAZIONE

1. **Radici di un polinomio.**
   Si dice che il numero α `e radice del polinomio p(x) se p(α) = 0.
   Si dice che α `e una radice intera, razionale, reale, complessa, a seconda che α sia un numero intero, razionale, reale, complesso.
2. **Molteplicità di una radice di un polinomio**. Sia α una radice di un polinomio p(x).Diciamo che il numero intero m è la molteplicità di α se p(x) è divisibile per (x − α) esattamente m volte. La molteplicità di una radice `e sempre ≥ 1 e ≤ del grado di p(x). Le radici di **molteplicità unitaria** si dicono **semplici**.
3. **Teorema fondamentale dell'algebra**. Un polinomio di grado n a coefficienti complessi ha esattamente n radici complesse, se ogni radice viene contata tante volte quante `e la sua molteplicità.
   A maggior ragione un polinomio a coefficienti reali (o razionali o interi) ha esattamente n radici complesse, dunque al massimo n radici reali, razionali o intere.
4. **Fattorizzazione sui complessi**. Un polinomio di grado n a coefficienti complessi si può scrivere come prodotto di n polinomi di grado 1 a coefficienti complessi. La fattorizzazione è unica a meno dell'ordine dei fattori. In particolare, se p(x) è **monico**(cioè $p(x)=x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_0$, alternativamente si può sempre prima dividere per a_n) e $\lambda_1,\ldots,\lambda_n$ sono le sue *n* radici (ogni radice è stata ripetuta a seconda della sua molteplicità), allora
   $$p(x)=(x-\lambda_1)\cdot\ldots\cdot(x-\lambda_n)$$
5. **Fattorizzazione sui reali.** Un polinomio a coefficienti reali si può scrivere come prodotto di polinomi di grado 1 e 2 a coefficienti reali. La fattorizzazione è unica a meno dell'ordine dei fattori.
6. **Esistenza di radici reali**. Un polinomio a coefficienti reali di grado dispari ha sempre almeno una radice reale (questo però non vuol dire che ci sia una formula semplice per calcolarla!).
   Se il grado è pari, può non avere nessuna radice reale.

Fattorizzare polinomi di secondo grado

$x^2 - 2x - 3$

$-x^2 + 2x + 3$

Fattorizzare polinomi di terzo grado

$x^3 + x^2 - x - 1$

EQUAZIONI

EQUAZIONI DI SECONDO GRADO

$$ax^2+bx+c=0$$

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$\Delta=b^2-4ac$$

Se $\Delta>0$ l'equazione ammette una coppia di radici reali che coincidono ai punti in cui la parabola definita da $y=ax^2+bx+c$ interseca l'ascissa.

Se $\Delta=0$ l'equazione ammette una coppia di radici reali e coincidenti. La parabola definita è tangente all'ascissa nell'unico punto dove la funzione si annulla, ovvero $x=-\frac{b}{2a}$.

Se $\Delta<0$ l'equazione non ammette radici reali. Se però si va a cercare la soluzione nell'insieme dei numeri complessi, allora ricordando che l'unità immaginaria è definita come $\sqrt{-1}=i$, si ha che l'equazione ammette come soluzione una coppia di numeri complessi e coniugati dati da $x=\frac{-b\pm\sqrt{-\Delta}\ i}{2a}$

Tecnica 2) Usando il trinomio notevole: $x^2-sx+p=0 \Rightarrow (x+a)(x+b)$, $s=a+b;\ p=a\cdot b$

Esempio: $x^2+4x-12=0$ $\Rightarrow$ osservando che $6-2=4$ e $6\cdot(-2)=-12$ $\Rightarrow x_1=6$, $x_2=-2$

EQUAZIONI IRRAZIONALI

$$\sqrt[n]{f(x)}=g(x)$$

Se n è pari, bisogna tener conto del dominio della radice e l'equazione diventa:

$$\begin{cases} f(x)=[g(x)]^n \\ f(x)\geq 0 \end{cases}$$

Se n è dispari, basta semplicemente porre: $f(x)=[g(x)]^n$

EQUAZIONI BIQUADRATICHE

$$ax^{2n}+bx^{n}+c=0$$

Passo 1 - Basta fare una **sostituzione**

$$x^{n}=t$$

Passo 2 - Risolvere:

$$at^{2}+bt+c=0$$

Passo 3 - Risolvere le equazioni:

$$x^{n}=t_1$$

$$x^{n}=t_2$$

Ricorda che:

Se n è pari, $t_1 \geq 0 \Rightarrow x^{n}=t_1 \Rightarrow x=\pm\sqrt[n]{t_1}$

Se n è pari, $t_1 < 0 \Rightarrow x^{n}=t_1 \Rightarrow impossibile$

EQUAZIONI RECIPROCHE

$$ax^{4n}+bx^{3n}+\gamma x^{2n}+bx^{n}+a=0$$

$$a\left(x^{4n}+1\right)+b\left(x^{3n}+x^{n}\right)+\gamma x^{2n}=0$$

$$ax^{2n}\left(x^{2n}+\frac{1}{x^{2n}}\right)+bx^{2n}\left(x^{n}+\frac{1}{x^{n}}\right)+\gamma x^{2n}=0$$

$$a\left(x^{2n}+\frac{1}{x^{2n}}\right)+b\left(x^{n}+\frac{1}{x^{n}}\right)+\gamma=0$$

$$a\left(x^{2n}+\frac{1}{x^{2n}}+2-2\right)+b\left(x^{n}+\frac{1}{x^{n}}\right)+\gamma=0$$

$$a\left(\left(x^{n}+\frac{1}{x^{n}}\right)^{2}-2\right)+b\left(x^{n}+\frac{1}{x^{n}}\right)+\gamma=0$$

$$x^n + \frac{1}{x^n} = t \;\; ; \;\; c = \gamma - 2a$$

$$at^2 + bt + c = 0$$

$$\frac{x^{2n}+1}{x^n} = t_i \Rightarrow \frac{x^{2n}+1-t_i\,x^n}{x^n} = 0 \Rightarrow x^{2n} - t_i\,x^n + 1 = 0$$

Soluzioni:

$$S = \left\{ x \in \mathbb{R} : \; x^{2n} - t_1\,x^n + 1 = 0 \; \cup \; x^{2n} - t_2\,x^n + 1 = 0 \; \cup \; x = 0 \right\}$$

EQUAZIONI DI GRADO MAGGIORE AL SECONDO

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$$

TECNICA 1

La prima cosa che si può provare a fare è quella individuare una radice semplice (esempio: x=1,-1,2,-2) e **scomporre** il polinomio con la **regola di Ruffini**:

Esempio:

$$x^3 + 2x - 3 = 0$$

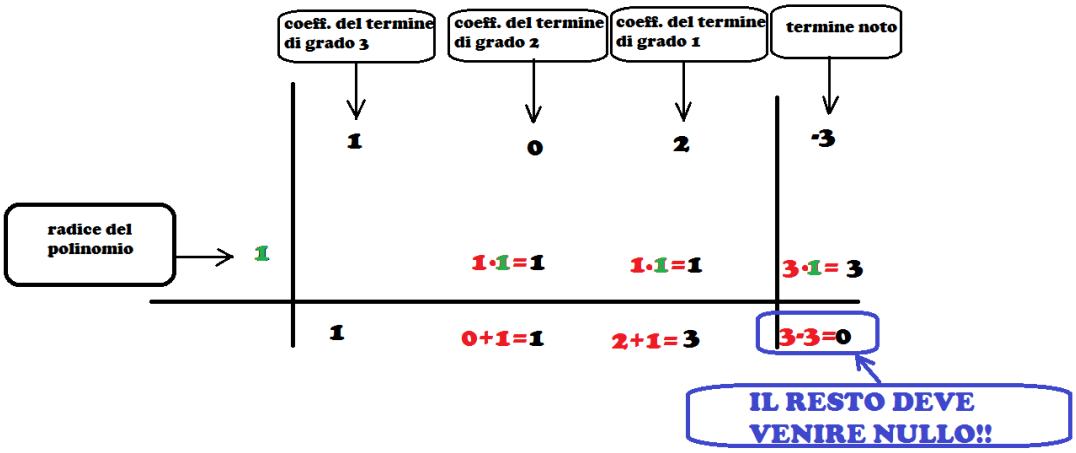
Passo 1) sostituisco alcuni valori alla x

Ad esempio:

x=-1 $(-1)^3 + 2(-1)^2 - 3 = -1 + 2 - 3 = -2 \neq 0$ non va bene..

x=1 $(1)^3 + 2(1)^2 - 3 = 1 + 2 - 3 = 0$ Ok, trovata!!!

Passo 2) Applico la regola di Ruffini:



TECNICA 2

Cercare di riconoscere **prodotti notevoli** nel polinomio:

Esempio 1:

$$x^3+5x^2-8x-40=0$$

Osservo che: $\frac{-8}{1}=\frac{-40}{5}$

E quindi proseguo in questo modo:

$$x^3+5x^2-8x-40=x^3-8x+5\left(x^2-8\right)=x\left(x^2-8\right)+5\left(x^2-8\right)=\left(x+5\right)\left(x^2-8\right)=$$
$$\left(x+5\right)\left(x-2\sqrt{2}\right)\left(x+2\sqrt{2}\right)$$

Esempio 2:

$$x^3-3x^2+9x-25=0$$

Riconosco il cubo di un binomio (manca solo il 27..)

$$x^3-3x^2+9x-25=x^3-3x^2+9x-27+2=\left(x-3\right)^2+2=0$$

Pongo $x-3=t \Rightarrow t^3+2=0 \Rightarrow t=-\sqrt[3]{2} \Rightarrow x=3-\sqrt[3]{2}$

DISEQUAZIONI

In matematica una disequazione è una relazione di disuguaglianza tra due espressioni che contengono incognite. La disuguaglianza può comparire in senso stretto $>$ o $<$ oppure in senso largo $\geq$ o $\leq$.
Le forme in cui essa può presentarsi sono le seguenti: $f(x)>g(x)$ $f(x)\geq g(x)$ $f(x)<g(x)$ $f(x)\leq g(x)$.

Risolvere una disequazione significa cercare l'insieme dei valori che sostituiti all'incognita x soddisfano la disequazione. Ad esempio data la disequazione $2x^4+1>\sqrt{x}+3$, tra le soluzioni c'è sicuramente $x=2$, infatti sostituendolo all'interno della disuguaglianza si ha $32+1>\sqrt{2}+3$ che è vero. $x=0$ invece non fa parte delle soluzioni perché non è vero che $1>3$. Trovare la soluzione di una disequazione in $\mathbb{R}$ significa cercare tutte le $x\in\mathbb{R}$ che verificano la disequazione. La soluzione di una disequazione va limitata nell'insieme di definizione delle singole funzioni. Nell'esempio compare una radice quadrata che è definita solo per valori positivi o nulli, di conseguenza dalla soluzione della disequazione bisogna escludere tutti gli $x<0$.

Due disequazioni si dicono equivalenti se ammettono le stesse soluzioni. Per arrivare alla soluzione bisogna fare dei passaggi che mantengano invariato l'insieme delle soluzioni, cioè che conducano a disequazioni equivalenti. Operazioni che alterano il dominio di definizione delle funzioni sono consentite a patto che si tenga conto delle limitazioni sul dominio iniziali.

Ad esempio $\sqrt{x}>x \not\Rightarrow x>x^2$ perché elevando entrambi i membri al quadrato si altera il dominio che inizialmente per la presenza della radice quadrata risultava $x\geq 0$ e dopo l'elevamento di entrambi i membri al quadrato diventa $x\in\mathbb{R}$. E' corretto invece scrivere $\sqrt{x}>x \Rightarrow \begin{cases} x>x^2 \\ x\geq 0 \end{cases}$. D'altronde la stessa cosa può essere vista da un altro punto di vista e cioè $\left(\sqrt{x}\right)^2=x$ se e solo se $x\geq 0$.

- $f(x)>g(x) \Rightarrow f(x)+c>g(x)+c$
  In una disequazione è sempre possibile aggiungere una quantità positiva o negativa ad entrambi i membri, ottenendo così una disequazione equivalente.
- $f(x)>g(x) \Rightarrow c\cdot f(x)>c\cdot g(x) \Leftrightarrow c>0$
  In una disequazione se si moltiplicano entrambi i membri per una quantità strettamente positiva si ottiene una disequazione equivalente se si lascia inalterato il verso della disuguaglianza.
- $f(x)>g(x) \Rightarrow c\cdot f(x)<c\cdot g(x) \Leftrightarrow c<0$
  In una disequazione se si moltiplicano entrambi i membri per una quantità strettamente negativa si ottiene una disequazione equivalente se si inverte il verso della disuguaglianza.
- $f(x)>g(x) \Rightarrow f(x)+q(x)>g(x)+q(x)$ se $Dom(q)\subset Dom(f)\cap Dom(g)$
  E' possibile aggiungere ad entrambi i membri una quantità dipendente da x a patto che questa quantità sia definita per almeno tutti i valori per cui risultano definite $f(x)$ e $g(x)$. In altre parole il dominio della funzione $q(x)$ deve essere contenuto sia nel dominio di $f(x)$ che nel

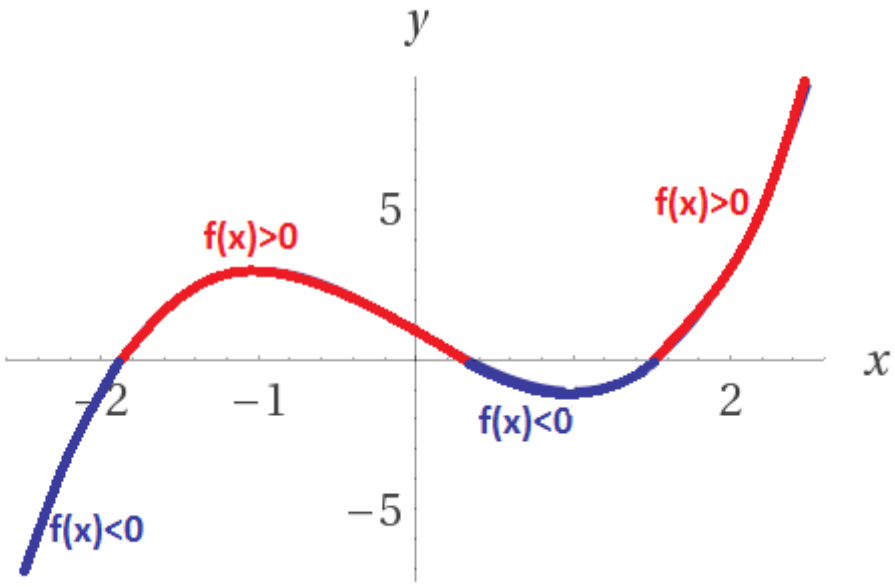
dominio di $g(x)$. Se questa condizione è rispettata allora si ha che $Dom(q)\cap Dom(f)\cap Dom(g)=Dom(f)\cap Dom(g)$ e quindi resta inalterato il dominio della soluzione.

- **Attenzione!!** $f(x)>g(x)\not\Rightarrow \frac{f(x)}{g(x)}>1$ perché non si sa se $g(x)$ è positivo.

  Questo passaggio è consentito, ricordandosi di porre $g(x)\neq 0$ per non alterare il dominio della disequazione, solo se $g(x)>0$ su tutto il dominio ed è consentito cambiando il verso alla diseguaglianza se $g(x)<0$ su tutto il dominio.

SOLUZIONE GRAFICA DI DISEQUAZIONI

Data una disequazione scritta nella forma $f(x)>0$ oppure $f(x)<0$ è possibile risolverla in maniera grafica se si riesce a tracciare il grafico di $f(x)$ nel piano cartesiano. Come prima cosa bisogna individuare le intersezioni con l'ascissa, cioè le soluzioni dell'equazione $f(x)=0$. Poi bisogna individuare a seconda della disuguaglianza gli intervalli dove $f(x)$ risulta positiva o negativa, che coincidono con le x in corrispondenza delle quali la funzione si trova rispettivamente al di sopra o al di sotto dell'ascissa, includendo o meno gli estremi a seconda che l'uguale sia compreso o meno all'interno della disuguaglianza.



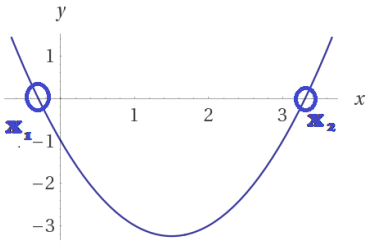
DISEQUAZIONI DI SECONDO GRADO

METODO DELLA PARABOLA

$f(x)=ax^2+bx+c$ è l'equazione di una parabola con asse parallelo all'ordinata.

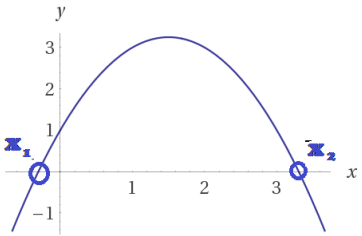
1. $\Delta>0$, $a>0$ parabola con concavità rivolta verso l'alto e ammette due radici reali che rappresentano le intersezioni con l'ascissa.

$$x_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} \quad , \quad x_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$$



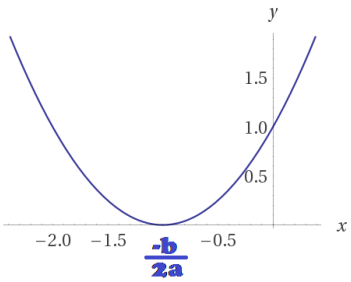
2. $\Delta>0$, $a<0$ parabola con concavità rivolta verso il basso e ammette due radici reali che rappresentano le intersezioni con l'ascissa.

$$x_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} \quad , \quad x_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$$

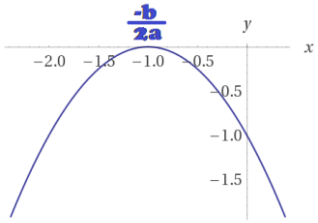


3. $\Delta=0$, $a>0$ parabola con concavità rivolta verso l'alto e ammette un unica radice reale. La parabola è tangente all'ascissa in corrispondenza della radice $x_1=\frac{-b}{2a}$.

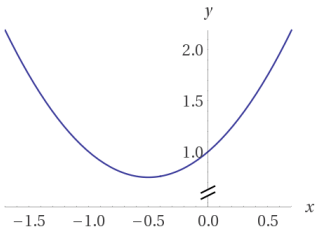
E' sempre positiva tranne in x_1 : $\forall x\in\mathbb{R}/\{x_1\}$



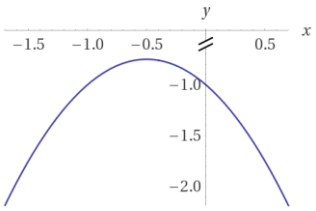
4. $\Delta = 0$, $a < 0$ parabola con concavità rivolta verso il basso e ammette un unica radice reale . La parabola è tangente all'ascissa in corrispondenza della radice $x_1 = \frac{-b}{2a}$.
   E' sempre negativa tranne in $x_1 : \forall x \in \mathbb{R}$



5. $\Delta < 0$, $a > 0$ parabola con concavità rivolta verso l'alto, non ammette radici reali . La parabola non interseca mai l'ascissa.
   E' sempre positiva.



6. $\Delta = 0$, $a < 0$ parabola con concavità rivolta verso il basso, non ammette radici reali. La parabola non interseca mai l'ascissa.
   E' sempre positiva.



METODO ALGEBRICO

Il metodo algebrico consiste nello scomporre in fattori il polinomio della disequazione.
Se $\Delta > 0$ il polinomio può essere scomposto in fattori di primo grado attraverso le radici r_1 e r_2 .
$ax^2 + bx + c = a(x - r_1)(x - r_2)$
Effettuata la scomposizione selezionare per la soluzione l'intervallo interno o esterno alle radici a seconda che il coefficiente del termine di secondo grado a sia concorde o meno con il verso della disequazione. Gli estremi vanno esclusi o inclusi nella soluzione a seconda che la diseguaglianza sia in senso stretto $> o <$ o in senso largo $\geq o \leq$.
Se $\Delta = 0$ il polinomio può essere scomposto con un unico fattore di secondo grado con molteplicità $\mu = 2$
$ax^2 + bx + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$

Il segno del polinomio di secondo grado è sempre positivo o negativo a seconda del segno del coefficiente del termine di secondo grado a ad eccezione del punto in cui il polinomio si annulla $x_0 = -\frac{b}{2a}$.

Pertanto la disequazione è sempre verificata o meno a seconda che il coefficiente del termine di secondo grado a sia concorde o meno con il verso della disequazione. Il punto in cui si annulla il polinomio $x_0 = -\frac{b}{2a}$ va escluso se la disequazione è in senso stretto $> o <$ mentre va incluso se la disequazione è in senso largo $\geq o \leq$.

Quando $\Delta < 0$ il polinomio di secondo grado non può essere scomposto. In tal caso la disequazione è sempre verificata o meno a seconda che il coefficiente del termine di secondo grado a sia concorde o meno con il verso della disequazione.

DISEQUAZIONI RAZIONALI

$$\frac{f(x)}{g(x)} > 0$$

La prima cosa da chiedersi è:
"è già scritta in questa forma?" Se così non fosse, allora come prima cosa bisogna cercare di ricondursi a questa forma!!

Esempio

$$\frac{x-3}{x+2} > 4+x \quad \Rightarrow \quad \frac{x-3}{x+2} - 4 - x > 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{x-3-4x-8-x^2-2x}{x+2} > 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{-x^2-5x-11}{x+2} > 0$$

STUDIO DEL SEGNO

Per ottenere la soluzione della disequazione bisogna porre numeratore e denominatore entrambi maggiori di zero (anche se il segno della disequazione è negativo) e studiare il segno tra numeratore e denominatore utilizzando la regola dei segni. Infine selezionare gli intervalli con il segno positivo o negativo a seconda del verso della disequazione che si sta risolvendo.

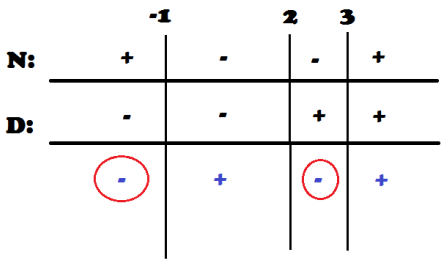
Esempio:

$$\frac{x^2-2x-3}{x-2} < 0$$

$$N(x) > 0: \quad x^2-2x-3 > 0 \quad \Rightarrow (x-3)(x+1) > 0 \Rightarrow x > 3 \vee x < -1$$

$$D(x) > 0 \Rightarrow \quad x-2 > 0 \Rightarrow \quad x > 2$$

Studio del segno:



Soluzione: $x < -1 \vee \ 2 < x < 3$

⚠ **COSA NON FARE!!**

$$\frac{x-3}{x+2} > 4+x \quad \Rightarrow \quad x-3 > (4+x)(x+2)$$

Anche se una soluzione di questo tipo può sembrare molto sbrigativa, è sbagliata!!
Moltiplicare entrambi i membri per $x+2$ è sbagliato perché è una quantità che può essere sia positiva che negativa. Se $x+2<0$ bisogna cambiare il segno alla diseguaglianza. Per correttezza bisogna condizionare la disequazione utilizzando due sistemi.

$$\begin{cases} x-3 > (4+x)(x+2) \\ x+2 > 0 \end{cases} \cup \begin{cases} x-3 < (4+x)(x+2) \\ x+2 < 0 \end{cases}$$

DISEQUAZIONI IRRAZIONALI

RADICI CON INDICE PARI

$$\sqrt[n]{p(x)} > q(x) \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} p(x) \geq 0 \\ q(x) \geq 0 \\ p(x) > \left[q(x)\right]^n \end{cases} \quad \cup \quad \begin{cases} p(x) \geq 0 \\ q(x) < 0 \end{cases}$$

$$\sqrt[n]{p(x)} < q(x) \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} p(x) \geq 0 \\ q(x) \geq 0 \\ p(x) < \left[q(x)\right]^n \end{cases}$$

RADICI CON INDICE DISPARI

$$\sqrt[n]{p(x)} < q(x) \quad \Rightarrow p(x) < \left[q(x)\right]^n$$

$$\sqrt[n]{p(x)} > q(x) \quad \Rightarrow p(x) > \left[q(x)\right]^n$$

DISEQUAZIONI CON I VALORI ASSOLUTI

$$|g(x)| > f(x) \begin{cases} g(x) \geq 0 \\ g(x) > f(x) \end{cases} \cup \begin{cases} g(x) < 0 \\ -g(x) < f(x) \end{cases}$$

CASI PIÙ IMMEDIATI

$$|g(x)| > c\ ,\ c > 0 \Rightarrow \{g(x) > c\} \cup \{g(x) < -c\}$$

$$|g(x)| < c\ ,\ c > 0 \Rightarrow \begin{cases} g(x) < c \\ g(x) > -c \end{cases}$$

$$|g(x)| > 0 \Rightarrow\ g(x) \neq 0$$

$$|g(x)| \geq 0 \Rightarrow\ \forall x \in Dom(g(x))$$

$$|g(x)| < 0 \Rightarrow\ impossibile$$

$$|g(x)| < 0 \Rightarrow\ g(x) = 0$$

STUDIO DEL SEGNO, SISTEMI E UNIONE

STUDIO DEL SEGNO

$$a(x)=\frac{f_1(x)\,f_2(x)\cdot\ldots\cdot f_n(x)}{g_1(x)\,g_2(x)\cdot\ldots\cdot g_n(x)}(\geq,<,<,oppure\leq)0$$

Lo studio del segno lo si fa ogni qual volta la disequazione è composta da un certo numero di fattori al numeratore e/o al denominatore.

Come prima cosa bisogna cercare gli intervalli in cui ciascuno dei fattori risulta positivo.

$$f_1(x)>0,\ \ldots,\ f_n(x)>0, g_1(x)>0,\ \ldots,\ g_n(x)>0,$$

Infine si utilizza la regola dei segni per individuare intervalli di positività e negatività della funzione. Infine selezionare il segno imposto dalla diseguaglianza, includendo gli estremi che annullano il numeratore se la disuguaglianza è in senso largo.

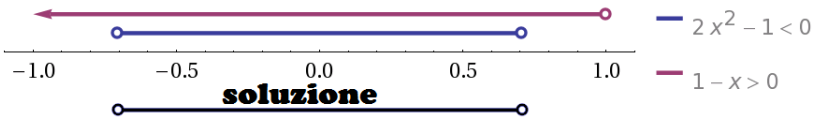
SISTEMA O INTERSEZIONE

$$\begin{cases} condizione\ 1 \\ condizione\ 2 \\ \vdots \\ condizione\ n \end{cases} \Leftrightarrow \{condizione\ 1\} \cap \{condizione\ 2\} \cap \ldots. \cap \{condizione\ n\}$$

Per risolvere un sistema bisogna individuare gli intervalli in cui tutte le condizioni sono verificate. Ogni condizione può essere rappresentata da un equazione o disequazione e ognuna ammette un insieme di soluzioni reali che può anche essere vuoto o l'intero asse dei reali. Per ottenere la soluzione bisogna cercare gli elementi in comune (**intersezione**) tra i vari insiemi di soluzioni. La soluzione sarà composta da intervalli e punti isolati.

Esempio

$$\begin{cases} 2x^2 - 1 < 0 \\ 1 - x > 0 \end{cases}$$



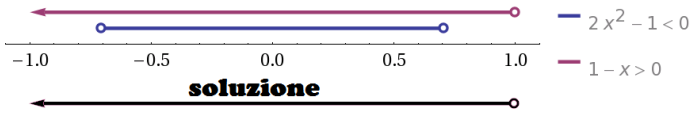
UNIONE

$$\{condizione\ 1\} \cup .... \cup \{condizione\ n\}$$

Anche in questo caso ogni condizione può essere rappresentata da un equazione o disequazione ed ognuna ammette un insieme di soluzioni reali che può anche essere vuoto o l'intero asse dei reali. Per ottenere la soluzione bisogna individuare l'insieme dei numeri reali contenuti in almeno uno degli insiemi che si uniscono.

Esempio

$$\{2x^2 - 1 < 0\} \cup \{1 - x > 0\}$$



GEOMETRIA ANALITICA

LUOGO GEOMETRICO DI PUNTI

Definizione: Insieme di punti del piano che rispettano una certa proprietà.

Un luogo geometrico di punti può descrivere aree (figure piane), linee (curve) oppure punti isolati del piano.

Un luogo geometrico nel piano si può descrivere attraverso insiemi o equazioni e disequazioni.

Un luogo geometrico può essere rappresentato in forma insiemistica descrivendo l'insieme o gli insiemi per proprietà o per elenco.

Insieme rappresentato per proprietà:

$$\left\{ P \equiv (x,y) \in \mathbb{R}^2 : P \text{ rispetta una certa proprietà} \right\}$$

Insieme rappresentato per elenco:

$$\left\{ \text{Area della Circonf. di centro } C=(0,1) \text{ e raggio } r=1 \right\} \cup \left\{ \text{retta di coeff. angolare } m=3 \text{ e } q=2 \right\}$$

In alternativa, un luogo geometrico di punti può essere definito in forma implicita da un'equazione:

$$f(x,y)=0$$

L'insieme degli zeri della funzione $f(x,y)$, ovvero le soluzioni dell'equazione $f(x,y)=0$, con $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definisce in forma implicita un luogo geometrico di punti del piano.

In alcuni casi particolari è possibile rappresentare un luogo geometrico di punti in forma esplicita, ovvero esplicitando l'equazione in funzione di una delle due variabili:

$$y=f(x)\ .$$

In questo ultimo caso è possibile descrivere solo curve semplici e non chiuse.

Un ulteriore forma con cui è possibile descrivere un luogo geometrico di punti, è attraverso un sistema di equazioni o disequazioni:

$$\begin{cases} f(x,y)=0 \\ g(x,y)=0 \\ q(x,y)\le 0 \\ .... \end{cases}$$

CAMBIAMENTO DEL SISTEMA DI RIFERIMENTO

Si vuole rappresentare un luogo geometrico in un sistema di riferimento traslato di un vettore (x_0, y_0) rispetto a quello originale. Per fare ciò bisogna usare la sostituzione:

$$\begin{cases} x = X + x_0 \\ y = Y + y_0 \end{cases}$$

Per tornare invece al sistema di riferimento originale utilizzare la sostituzione inversa.

$$\begin{cases} x - x_0 = X \\ y - y_0 = Y \end{cases}$$

Se si vuole rappresentare un luogo geometrico in un sistema di riferimento ruotato di un angolo α rispetto a quello originario:

$$\begin{cases} x = X\cos\alpha - Y\sin\alpha \\ y = X\sin\alpha + Y\cos\alpha \end{cases}$$

Per tornare al sistema di riferimento originale bisogna fare una rotazione in senso opposto (cioè di $-\alpha$)

$$\begin{cases} X = x\cos(-\alpha) - y\sin(-\alpha) \\ Y = x\sin(-\alpha) + y\cos(-\alpha) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} X = x\cos\alpha + y\sin\alpha \\ Y = -x\sin\alpha + y\cos\alpha \end{cases}$$

TRASLAZIONE E ROTAZIONE DI UN LUOGO GEOMETRICO

Traslazione rigida di un luogo geometrico di (x_0, y_0):

$$f(x,y) = 0 \xrightarrow{traslazione} f(x - x_0, y - y_0) = 0$$

Rotazione di un luogo geometrico di un angolo α.

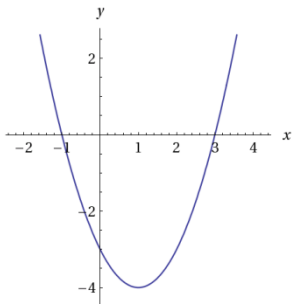
$$f(x,y) = 0 \xrightarrow{rotazione} f(x\cos\alpha + y\sin\alpha, -x\sin\alpha + y\cos\alpha) = 0$$

Se $\alpha > 0$ la rotazione avviene in senso antiorario, se $\alpha < 0$ la rotazione avviene in senso orario.

Esempio 1:

Parabola $y = x^2 - 2x - 3$

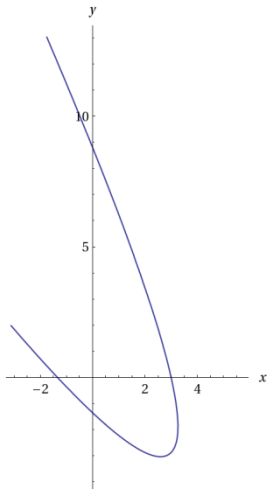
$$f(x,y) = x^2 - 2x - 3 - y = 0$$



Proviamo ora a ruotare la figura di 30 gradi in senso antiorario. Per fare ciò bisogna fare la sostituzione:

$$x \to x\cos\frac{\pi}{6} + y\sin\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{2}y$$

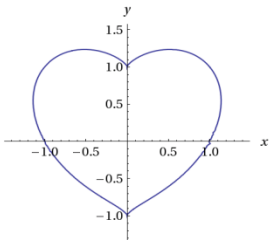
$$y \to -x\sin\frac{\pi}{6} + y\cos\frac{\pi}{6} = -\frac{1}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2}y$$



Esempio 2

Partiamo dalla ***heart function*** definita in maniera implicita dalla seguente equazione

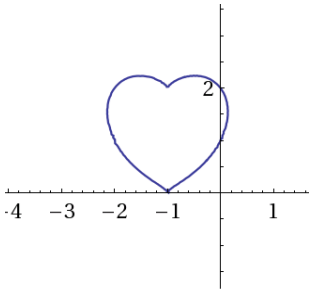
$$\left(x^2+y^2-1\right)-x^2y^3=0$$



Facciamo una traslazione rigida della figura di $\left(x_0,y_0\right)=\left(-1,1\right)$.

L'equazione diventa:

$$\left(\left(x+1\right)^2+\left(y-1\right)^2-1\right)-\left(x+1\right)^2\left(y-1\right)^3=0$$



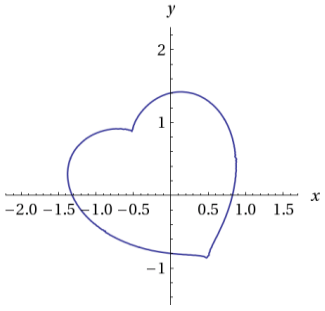
Proviamo ora a ruotare la figura di 30 gradi in senso antiorario. Per fare ciò bisogna fare la sostituzione:

$$x\to x\cos\frac{\pi}{6}+y\sin\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2}x+\frac{1}{2}y$$

$$y\to -x\sin\frac{\pi}{6}+y\cos\frac{\pi}{6}=-\frac{1}{2}x+\frac{\sqrt{3}}{2}y$$

L'equazione diventa:

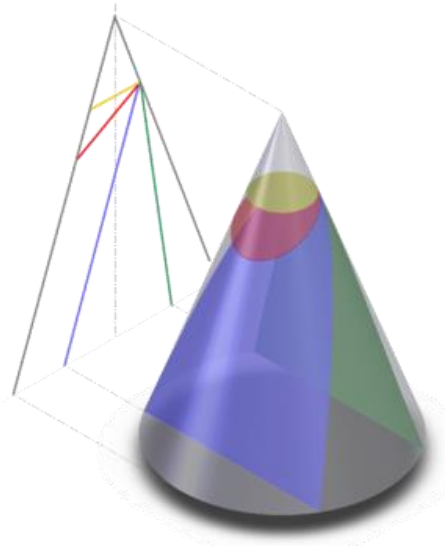
$$\left(\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x+\frac{1}{2}y\right)^2+\left(-\frac{1}{2}x+\frac{\sqrt{3}}{2}y\right)^2-1\right)-\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x+\frac{1}{2}y\right)^2\left(-\frac{1}{2}x+\frac{\sqrt{3}}{2}y\right)^3=0$$



CONICHE

In geometria analitica si definiscono una famiglia di curve note come **coniche**.

Queste curve sono il **punto**, la **retta**, la **parabola**, la **circonferenza**, l'**ellissi**, e l'**iperbole** e prendono il nome di coniche perché possono essere ottenute intersecando opportunamente un cono circolare con un piano.



A seconda del piano che interseca il cono si possono avere coniche degeneri e non degeneri. Fanno parte della famiglia delle coniche non degeneri la circonferenza, l'ellissi, l'iperbole e la parabola. Mentre fanno parte della famiglia delle coniche degeneri il punto e la retta che si ottengono per intersezione con piani passanti per il vertice.

Sia θ l'angolo che una retta generatrice forma con l'asse del cono.

Il punto si ottiene intersecando il cono nel vertice che unisce le due falde con un piano avente un inclinazione maggiore rispetto a θ.

Una coppia di rette incidenti nel vertice del cono si ha intersecando il cono con un piano avente un inclinazione minore rispetto a θ.

Una retta singola si ha intersecando il cono con un piano avente un inclinazione esattamente uguale a θ. Si tratta in tal caso di un piano tangente.

RETTA

forma implicita: $ax+by+c=0$

forma esplicita: $y=mx+q$

m si chiama **coefficiente angolare**, *q* invece è il **termine noto** o **ordinata all'origine.**

Il coefficiente angolare misura la tangente dell'angolo che la retta forma con l'ascissa. Tanto più *m* è grande tanto più grande è l'angolo. A seconda del segno del coefficiente angolare la retta è crescente o decrescente. In particolare la retta risulta crescente se il coefficiente angolare è positivo, viceversa risulta decrescente se il coefficiente angolare è negativo.

CIRCONFERENZA

Circonferenza come luogo geometrico: la circonferenza è il luogo geometrico dei punti equidistanti da un punto fisso detto centro e la cui distanza risulta pari al raggio.

In forma insiemistica è l'insieme dei punti P del piano la cui distanza euclidea $d(P,C_0)$ dal centro C_0 è costante e pari al raggio r :

$$C=\left\{P\equiv(x,y)\in\mathbb{R}^2 : d(P,C_0)=r,\ C_0=(x_0,y_0), r>0\right\}$$

L'**equazione canonica** della circonferenza è espressa in forma implicita dall'equazione $x^2+y^2=r^2$ ed in forma esplicita da $y=\pm\sqrt{r^2-x^2}$ e rappresenta una circonferenza di centro nell'origine e raggio r .

Una circonferenza centrata in un punto qualunque del piano si ottiene a partire da quella canonica attraverso una traslazione rigida.

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=r^2 \Leftrightarrow x^2+y^2+ax+bx+c=0$$

$$x^2+ax+\frac{a^2}{4}-\frac{a^2}{4}+y^2+by+\frac{b^2}{4}-\frac{b^2}{4}+c=0$$

$$\left(x+\frac{a}{2}\right)^2+\left(y+\frac{b}{2}\right)^2=-c+\frac{a^2}{4}+\frac{b^2}{4}$$

Da cui: $x_0=-\frac{a}{2}$, $y_0=-\frac{b}{2}$, $r^2=\frac{a^2+b^2-4c}{4}$

PARABOLA CON ASSE PARALLELO ALL'ORDINATA

Parabola come luogo geometrico: la parabola è il luogo geometrico dei punti equidistanti da un punto fisso detto fuoco e una retta detta direttrice.

Parabola come sezione conica: la parabola è la figura che si ottiene tagliando un cono circolare con un piano parallelo ad una retta generatrice.

La parabola in **forma canonica** è quella di equazione $y=ax^2$ avente vertice nell'origine e come direttrice l'ordinata e fuoco in $F=\left(0,\frac{1}{4a}\right)$.

L'equazione di una qualunque parabola con direttrice parallela all'ordinata si ottiene a partire da quella canonica attraverso una traslazione rigida $y-y_0=a(x-x_0)^2$ che in forma esplicita diventa

$$y=a(x-x_0)^2+y_0=ax^2-2ax_0x+ax_0{}^2+y_0=ax^2+bx+c$$

$$c = ax_0^{\,2} + y_0 \quad \Rightarrow \quad y_0 = c - ax_0^{\,2}$$

$$b = -2ax_0 \quad \Rightarrow \quad x_0 = -\frac{b}{2a} \Rightarrow y_0 = c - a\left(-\frac{b}{2a}\right)^2 = \left(\frac{4ac-b^2}{4a}\right) = -\frac{\Delta}{4a}$$

Il vertice della parabola ha coordinate $V = (x_0, y_0) = \left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\right)$ mentre il fuoco ha coordinate $F = \left(-\frac{b}{2a}, \frac{1-\Delta}{4a}\right)$.

ELLISSE

Ellisse come luogo geometrico: L'ellissi è il luogo geometrico dei punti la cui somma delle distanze da due punti fissi detti fuochi dell'ellisse. Se i due fuochi vengono a coincidere si ottiene una circonferenza (per tale ragione la circonferenza può essere vista come un caso particolare di ellisse).

Ellisse come conica: è la figura ottenuta intersecando un cono con un piano che con il suo asse formi angoli maggiori di θ e minori o uguali a $\frac{\pi}{2}$, dove θ è l'angolo compreso tra una retta generatrice e l'asse del cono. Ciascuna di tali intersezioni appartiene a una sola delle due falde del cono. Nel caso particolare il piano risultasse ortogonale rispetto all'asse del cono e quindi l'angolo compreso tra il piano e l'asse del cono sia proprio pari a $\frac{\pi}{2}$, allora si ottiene una circonferenza.

L'equazione canonica $\frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1$ rappresenta un'ellissi ha gli assi paralleli all'ascissa e all'ordinata del piano cartesiano. In particolare il semiasse parallelo all'asse delle x ha una lunghezza pari ad a, mentre il semiasse parallelo a quello delle y ha una lunghezza pari a b.

IPERBOLE

Iperbole come luogo geometrico: L'iperbole è il luogo geometrico dei punti il cui valore assoluto delle differenze da due punti fissi detti fuochi è costante.

Iperbole come conica: ottenuta per intersezione del cono con un piano che formi con il suo asse un angolo inferiore a θ, dove θ è l'angolo compreso tra una generatrice e l'asse del cono. L'iperbole è una curva aperta e siccome il piano interseca entrambe le falde del cono, essa si bipartisce in due sottoinsiemi connessi detti *rami della conica*.

Per l'iperbole ci sono due forme canoniche.

La prima forma canonica è data dall'iperbole con asse di simmetria coincidente con l'ascissa di equazione $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$. I vertici si trovano sull'ascissa e si ottengono ponendo y=0, da cui $x = \pm a$, da cui $V = (\pm a, 0)$ e gli asintoti hanno equazione $y = \pm \frac{b}{a} x$.

La seconda forma canonica è data dall'iperbole con asse di simmetria coincidente con l'ordinata di equazione $\frac{y^2}{b^2}-\frac{x^2}{a^2}=1$. I vertici si trovano sull'ascissa e si ottengono ponendo x=0, da cui $y=\pm b$, da cui $V=(0,\pm b)$ e gli asintoti hanno equazione $y=\pm\frac{b}{a}x$.

Iperbole equilatera si definisce iperbole equilatera un iperbole i cui asintoti sono perpendicolari tra loro. In particolare si definisce **iperbole equilatera riferita ai propri asintoti** un iperbole equilatera i cui asintoti coincidono con gli assi cartesiani. L'equazione dell'iperbole di quest'ultimo tipo è $xy=c$ con $c\neq 0$. In particolare si trova nel primo e terzo quadrante se $c>0$, mentre si trova nel secondo e quarto quadrante se $c<0$.

Funzioni omografiche. Si definisce funzione omografica una qualsiasi funzione razionale formata da due polinomi di primo grado $y=\frac{ax+b}{cx+d}$ con $a,b,c,d\in\mathbb{R}$ coefficienti reali.

Una funzione omografica può avere come supporto (grafico) una retta, una retta orizzontale oppure un'iperbole equilatera con assi paralleli agli assi cartesiani.

Una retta si ha se $c=0$. In tal caso l'equazione diventa $y=\frac{a}{d}x+\frac{b}{d}$

Una retta orizzontale si ha se $ad=bc\Rightarrow\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ $y=\frac{b\left(\frac{a}{b}x+1\right)}{d\left(\frac{c}{d}x+1\right)}\Rightarrow y=\frac{b}{d}$

In tutti gli altri casi $c\neq 0$ e $ad\neq bc$ la funzione omografica rappresenta un iperbole equilatera con asintoti paralleli agli assi cartesiani. In particolare una funzione omografica può essere ottenuta da una traslazione rigida di un iperbole equilatera riferita ai propri asintoti.

Partendo da quest'ultima $xy=k$ e traslando rigidamente il grafico di (x_0,y_0) si ha:

$$(x-x_0)(y-y_0)=k\Rightarrow\left(\frac{1}{k}x-\frac{1}{k}x_0\right)(y-y_0)=1\Rightarrow y=\frac{1}{\frac{1}{k}x-\frac{1}{k}x_0}+y_0=\frac{1+\frac{1}{k}y_0x-\frac{1}{k}x_0y_0}{\frac{1}{k}x-\frac{1}{k}x_0}=\frac{ax-b}{cx+d}$$

Dove $a=\frac{y_0}{k}$, $b=1-\frac{1}{k}x_0y_0$, $c=\frac{1}{k}$, $d=-\frac{x_0}{k}$

Il centro di simmetria dell'iperbole verrà traslato dall'origine in $C=(x_0,y_0)$. Per ricavare il centro di simmetria direttamente dai coefficienti della funzione omografica si può scrivere $x_0=-\frac{d}{c}$, $y_0=\frac{a}{c}$

CARATTERIZZAZIONE DI UNA CONICA GENERICA

L'equazione generale di una conica è un **equazione quadratica** data dall'espressione:

$$ax^2+2bxy+cy^2+2dx+2ey+f=0$$

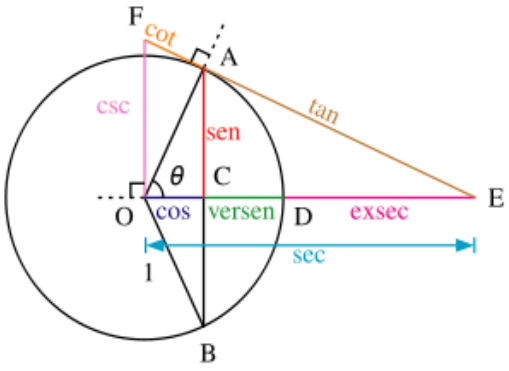
Se $b^2=4ac\Rightarrow$ la conica rappresenta una **parabola**.

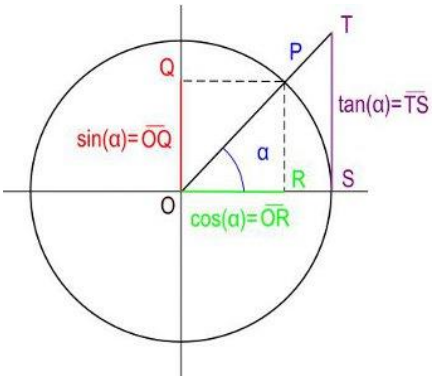
Se $b^2<ac$ e $a\neq c$ e/o $b\neq 0$ $\Rightarrow$ si tratta di un **ellissi**.

Se $a=c$, $b=0\Rightarrow$ si ha una circonferenza.

Se $b^2 > ac \Rightarrow$ si ha un iperbole.
Se $a = -c \Rightarrow$ si ha un iperbole rettangolare. Si osserva che quest'ultima condizione implica la precedente, visto che $a = -c$ implica che a e c sono discordi per cui $ac \leq 0$ e $b^2 \geq 0$, quindi risulta verificato che $b^2 > ac \ \ \forall a, b, c \in \mathbb{R}$, ad eccezione del caso in cui $a = -c = 0$ e $b = 0$, in tal caso però la forma quadratica si riduce ad una retta.

TRIGONOMETRIA





$$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1 \qquad \sin\alpha=\pm\sqrt{1-\cos^2\alpha} \qquad \cos\alpha=\pm\sqrt{1-\sin^2\alpha}$$

$$\cos\alpha=\pm\frac{1}{\sqrt{1+\tan^2\alpha}} \qquad \sin\alpha=\pm\frac{\tan\alpha}{\sqrt{1+\tan^2\alpha}}$$

α	α	sinα	cosα	tanα	cotα
0°	0	0	1	0	∞
30°	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{3}$
45°	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	1
60°	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
90°	$\frac{\pi}{2}$	1	0	∞	0

Formule di addizione

$$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$$
$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$$
$$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\sin\beta\cos\alpha$$
$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\sin\beta\cos\alpha$$
$$\tan(\alpha-\beta)=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}$$
$$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$$

Formule di duplicazione

$$\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha$$
$$\cos 2\alpha=\begin{cases}\cos^2\alpha-\sin^2\alpha\\ 2\cos^2\alpha-1\\ 1-2\sin^2\alpha\end{cases}$$
$$\tan 2\alpha=\frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$$

Formule parametriche

$$\left.\begin{aligned}\sin\alpha&=\frac{2t}{1+t^2}\\ \cos\alpha&=\frac{1-t^2}{1+t^2}\\ \tan\alpha&=\frac{2t}{1-t^2}\end{aligned}\right\}\quad\left(t=\tan\frac{\alpha}{2}\right)$$

Formule di prostaferesi

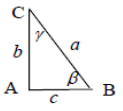
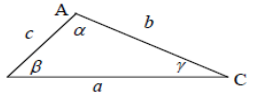
$$\sin p+\sin q=2\sin\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2}$$
$$\sin p-\sin q=2\sin\frac{p-q}{2}\cos\frac{p+q}{2}$$
$$\cos p+\cos q=2\cos\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2}$$
$$\cos p-\cos q=-2\sin\frac{p+q}{2}\sin\frac{p-q}{2}$$

Formule di bisezione

$$\sin\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}$$
$$\cos\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}$$
$$\tan\frac{\alpha}{2}=\begin{cases}\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}\\ \frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}\\ \frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}\end{cases}$$

Formule di triplicazione

$$\sin 3\alpha=3\sin\alpha-4\sin^3\alpha$$
$$\cos 3\alpha=4\cos^3\alpha-3\cos\alpha$$

Triangoli rettangoli	**Triangoli qualunque**
	
$b=a\sin\beta=a\cos\gamma=c\tan\beta$ $a=\frac{b}{\sin\beta}=\frac{b}{\cos\gamma}\,;\tan\beta=\frac{b}{c}$	$\frac{a}{\sin\alpha}=\frac{b}{\sin\beta}=\frac{c}{\sin\gamma}$
$c=a\sin\gamma=a\cos\beta=b\tan\gamma$ $a=\frac{c}{\sin\gamma}=\frac{c}{\cos\beta}\,;\tan\gamma=\frac{c}{b}$	$a^2=b^2+c^2-2bc\cos\alpha$ $b^2=a^2+c^2-2ac\cos\beta$ $c^2=a^2+b^2-2ab\cos\gamma$
	$Area(\mathrm{ABC})=\frac{1}{2}bc\sin\alpha$ $=\frac{1}{2}ac\sin\beta$ $=\frac{1}{2}ab\sin\gamma$

TEOREMA DI CARNOT

(Teorema di Pitagora per triangoli non rettangoli)

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$$

TEOREMA DEI SENI

$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$$

FORMULA DI ERONE

Sia $p = \frac{a+b+c}{2}$ il semiperimetro di un triangolo qualunque, allora l'area è data da

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

Alternativamente, noti due lati e l'angolo fra essi compresi, l'area è data da:

$$S = ab\sin\gamma = bc\sin\alpha = \alpha c\sin\beta$$

EQUAZIONI E DISEQUAZIONI IN SENO E COSENO

Equazioni omogenee in seno e coseno:

$$a\cos x + b\sin x + c = 0$$

Porre:

$$\begin{cases} \cos x = X \\ \sin x = Y \end{cases}$$

Risolvere:

$$\begin{cases} aX + bY + c = 0 \\ X^2 + Y^2 = 1 \;\rightarrow\; circonferenza\ trigonometrica \end{cases}$$

Sia X_i una possibile soluzione. Ricavare $x_i = \cos^{-1}(X_i)$

Aggiungere la periodicità alla soluzione.

DISEQUAZIONI OMOGENEE IN SENO E COSENO

$$a\cos x + b\sin x + c > 0$$

Porre:

$$\begin{cases} \cos x = X \\ \sin x = Y \end{cases}$$

Risolvere:

$$\begin{cases} aX + bY + c = 0 \\ X^2 + Y^2 = 1 \;\rightarrow\; circonferenza\ trigonometrica \end{cases}$$

Aggiungere la periodicità alla soluzione.

CASO IMMEDIATO

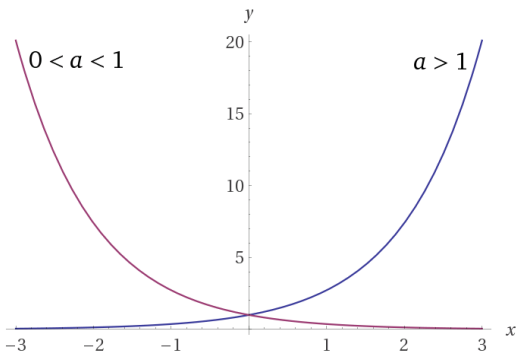
$\cos x > b$

soluzione grafica attraverso il grafico del coseno, oppure sempre utilizzando la circonferenza trigonometrica. In tal caso la retta che interseca la circonferenza trigonometrica è una retta parallela all'asse y.

LE FUNZIONI ESPONENZIALI E LOGARITMICHE

LA FUNZIONE ESPONENZIALE

$y = a^x$ con $a > 0$



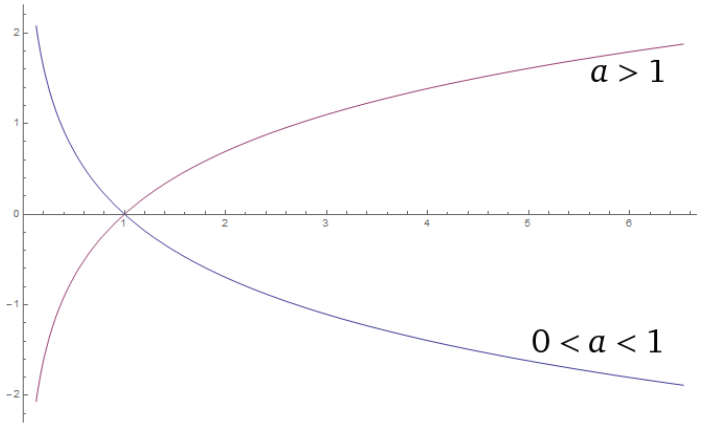
Dominio: $D = \mathbb{R}$

Codominio: $C = \mathbb{R}^+$

Il numero di nepero $e = 2,718..$

LA FUNZIONE LOGARITMO

$y = \log_b x$ b è la base del logaritmo (b>0). x è l'argomento



Definizione: *è quel numero a cui elevando la base si ottiene l'argomento*

Cioè $b^y = a$

Il logaritmo è la funzione inversa all'esponenziale.

$$y = a^x \quad \Rightarrow \quad x = \log_a y$$

Logaritmo naturale ($\ln x$) = logaritmo in cui la base è il numero di nepero: $e = 2,718..$

PROPRIETA' DI ESPONENZIALI E LOGARITMI

Nella seguente tabella sono rappresentate le principali proprietà di cui godono gli esponenziali e i logaritmi.

$\left(a^m\right)^n = a^{m \cdot n}$	$\log_a \frac{b}{c} = \log_a b - \log_a c$
$a^m \ a^n = a^{m+n}$	$a = b^{\log_b a}$
$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$	$a = e^{\ln a}$
$a^{-m} = \frac{1}{a^m}$	$a = \log_b b^a$
$\log_a (b \cdot c) = \log_a b + \log_a c$	$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$
$\log_a b^c = c \log_a b$	

Equazioni con gli esponenziali

$$b^{f(x)} = a \Rightarrow \begin{cases} f(x) = \log_b a & se \;\; a > 0 \\ impossibile & se \;\; a \le 0 \end{cases}$$

$$a^{f(x)} = b^{g(x)} \Rightarrow a^{f(x)} = a^{\log_a b \cdot g(x)} \Rightarrow f(x) = \log_a b \cdot g(x)$$

$$\alpha a^{2x} + \beta a^{x} + \gamma = 0$$

Pongo $a^x = t$

Risolvo $\alpha t^2 + \beta t + \gamma = 0$, trovo $t_{1,2}$ dall'equazione e poi le soluzioni sono $x_i = \log_a t_i \;\; se \;\; t_i > 0$

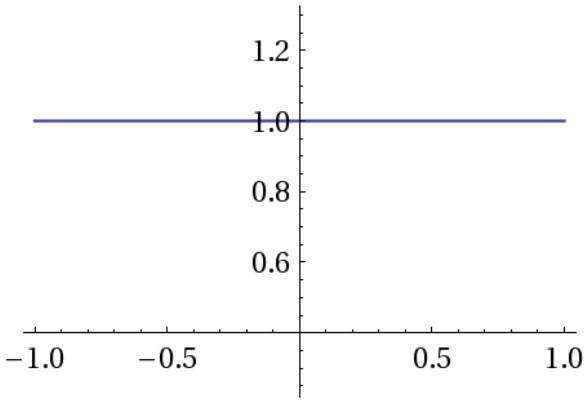
$x_i = impossibile \;\; se \;\; t_i \le 0$.

Disequazioni con gli esponenziali

GRAFICO DELLE PRINCIPALI FUNZIONI

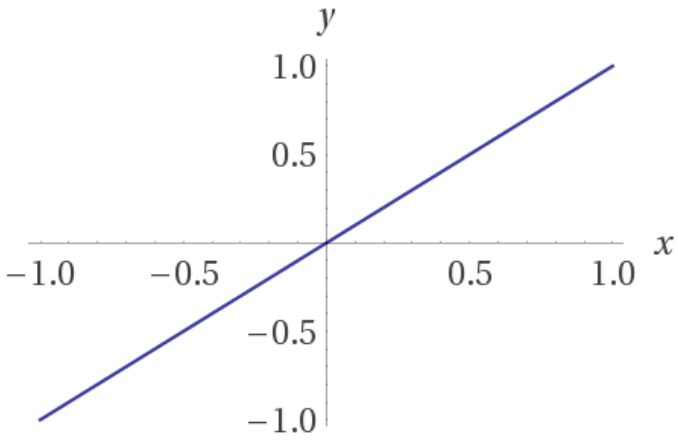
FUNZIONE COSTANTE

$y = c \quad c \in \mathbb{R}$



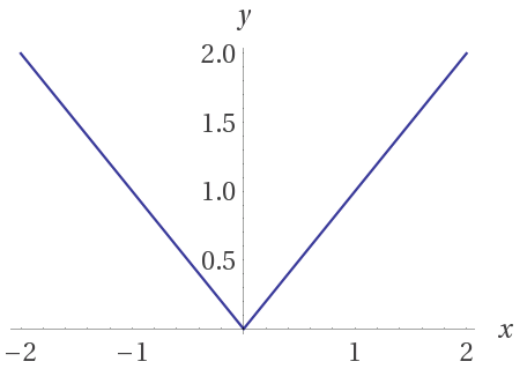
BISETTRICE I E III QUADRANTE

$y = x$



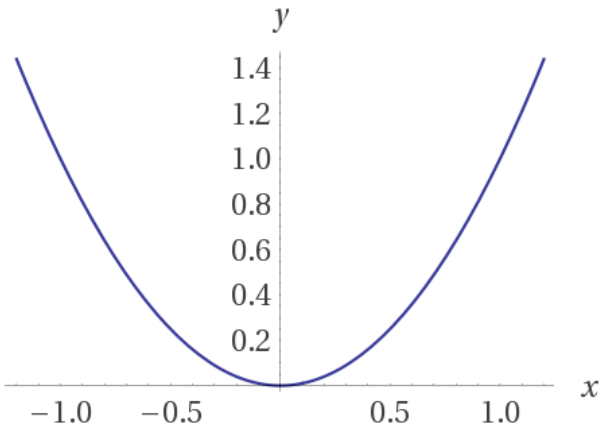
FUNZIONE VALORE ASSOLUTO

$$y = |x| = \begin{cases} x \;\; se \;\; x \geq 0 \\ -x \;\; se \;\; x < 0 \end{cases}$$



FUNZIONE PARABOLA

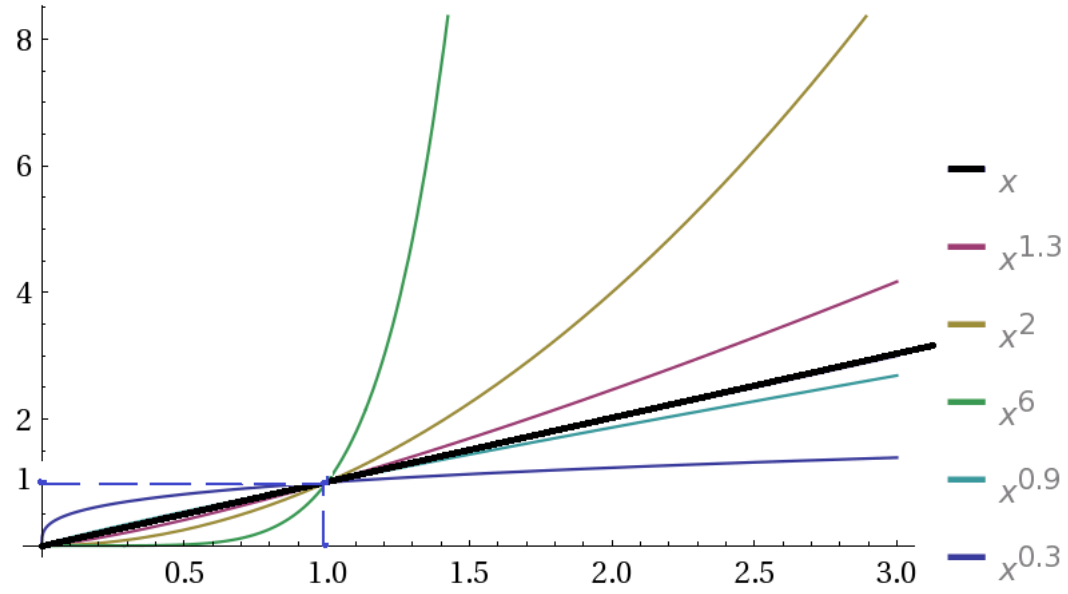
$$y = ax^2 + bx + c, \quad a, b, c \in \mathbb{R}$$



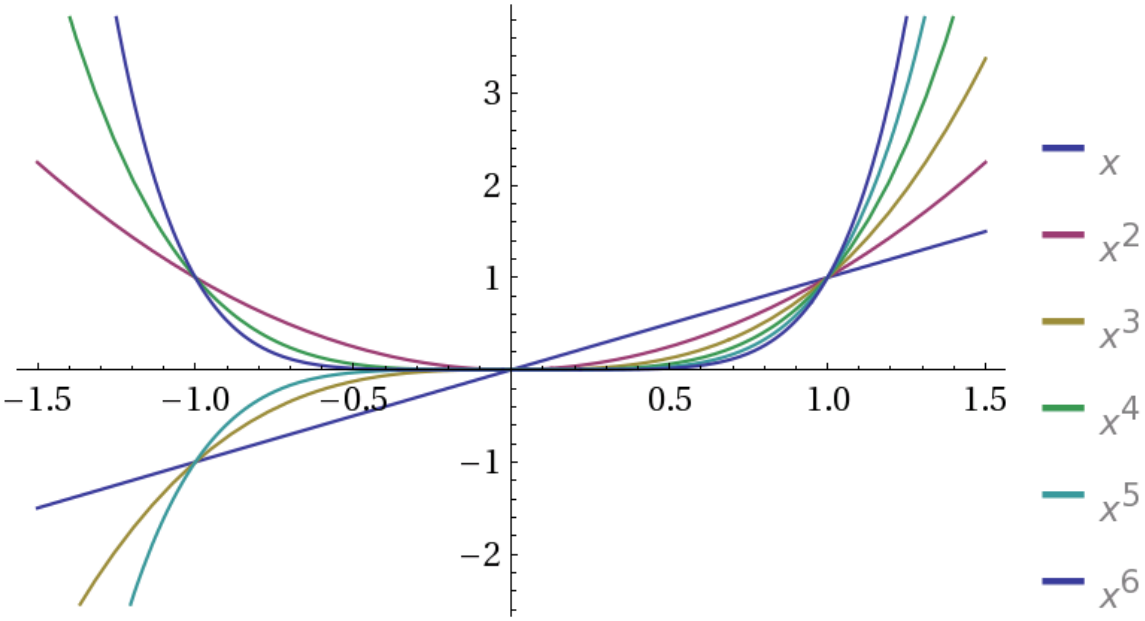
$$y = x^2$$

FUNZIONE POTENZA

$y = x^a,\ x > 0 \quad con \quad a \in \mathbb{R}$

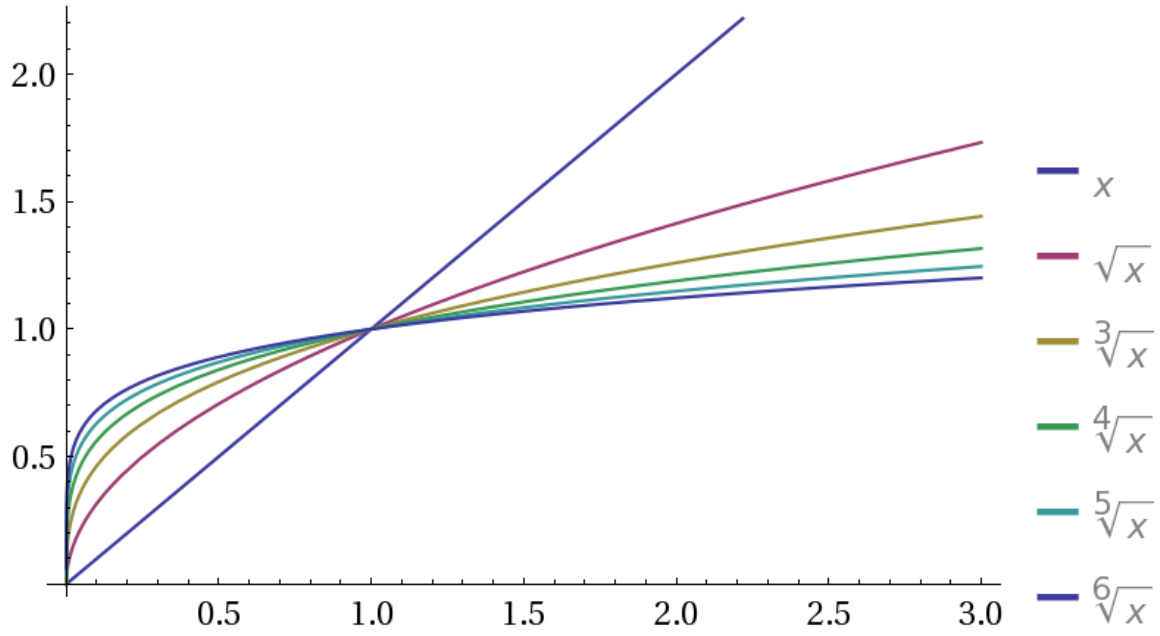


$y = x^n \quad n \in \mathbb{N}$



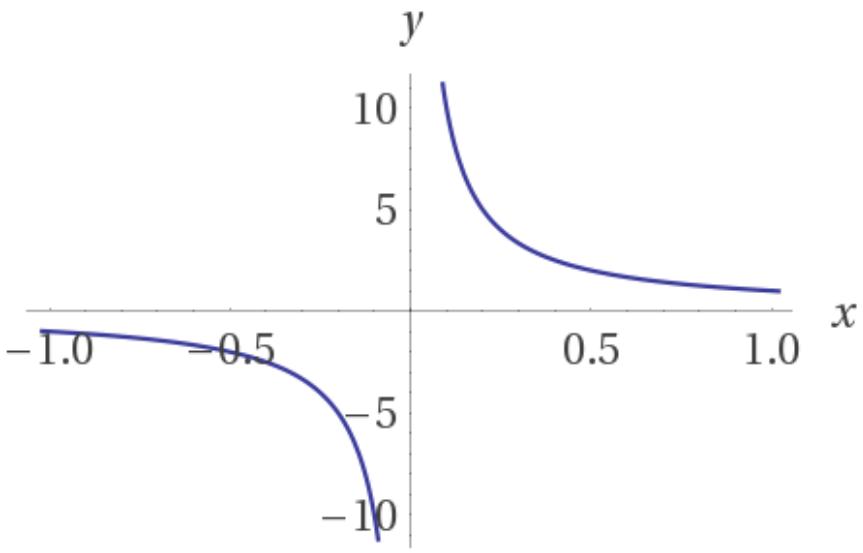
FUNZIONE RADICE

$y = \sqrt[n]{x} \quad n \in \mathbb{N}$



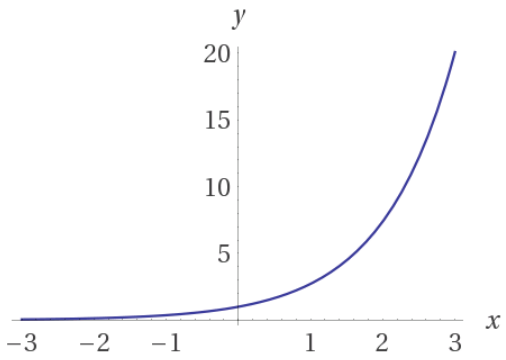
FUNZIONE IPERBOLE EQUILATERA

$y = \frac{1}{x}$



FUNZIONE ESPONENZIALE

$y = a^x \ , \ a > 1$



$y = a^x \ , \ a < 1$

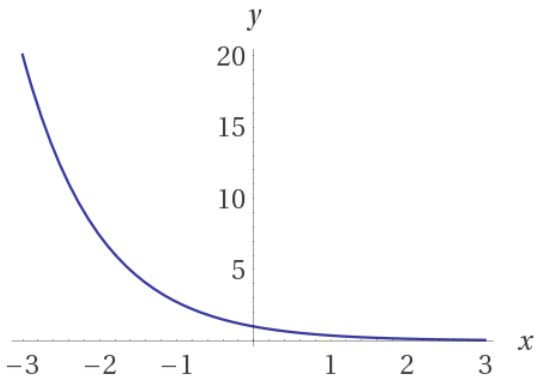
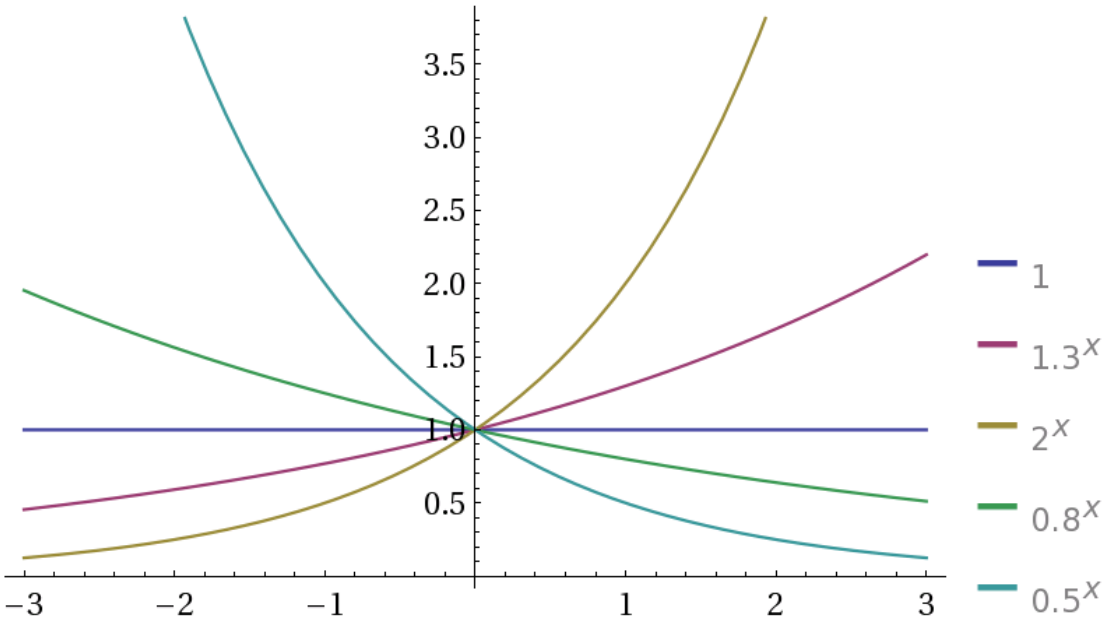
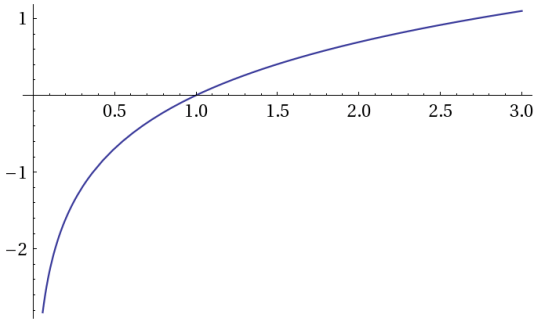


Grafico dell'esponenziale al variare della base



FUNZIONE LOGARITMO

$y = \log_a x,\ a > 1$



$y = \log_a x,\ a < 1$

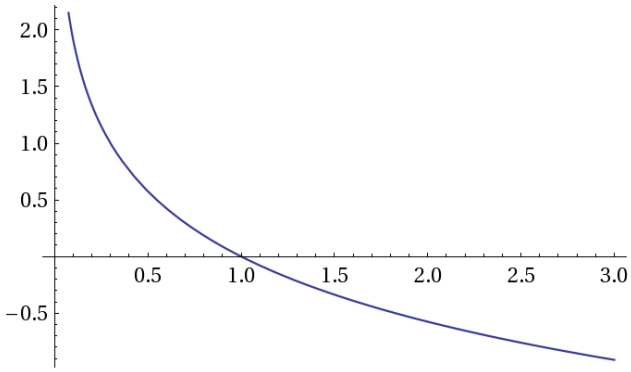
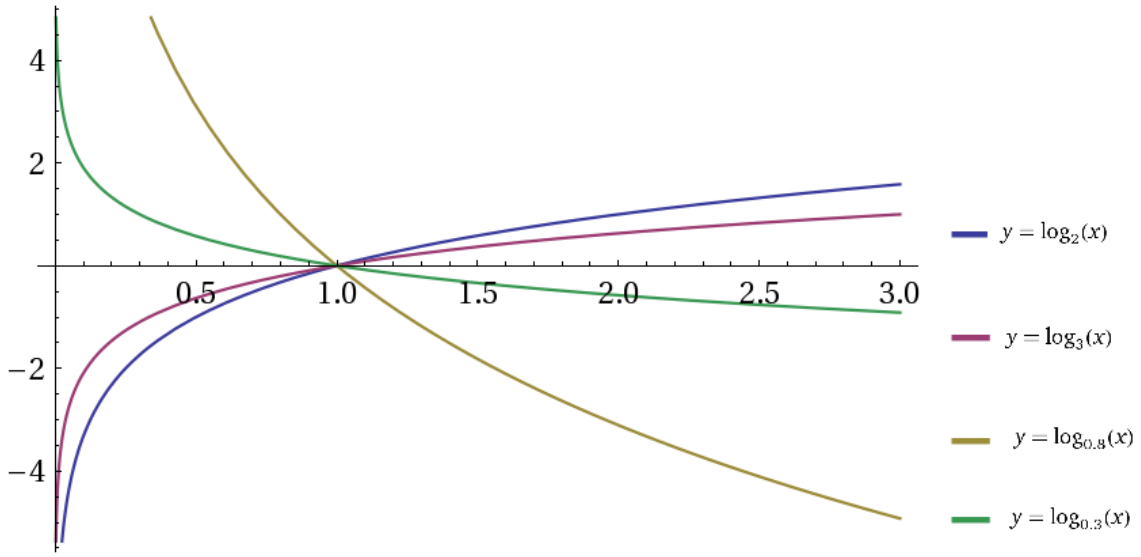
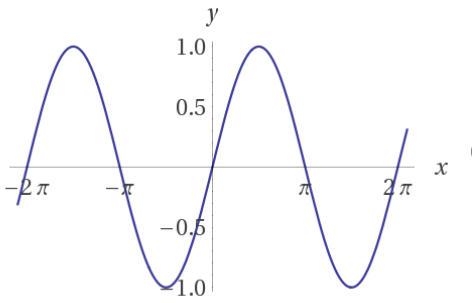


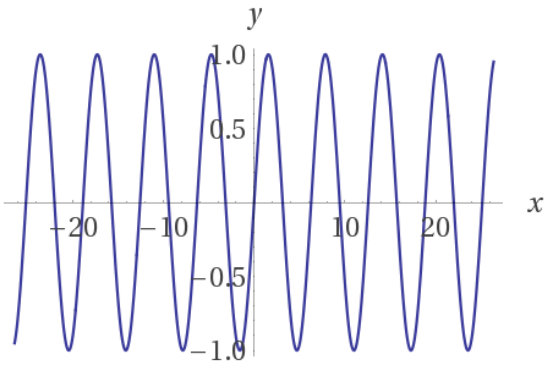
Grafico del logaritmo al variare della base



FUNZIONE SENO

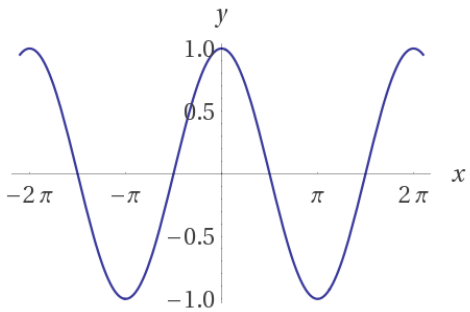
$$y = \sin x$$

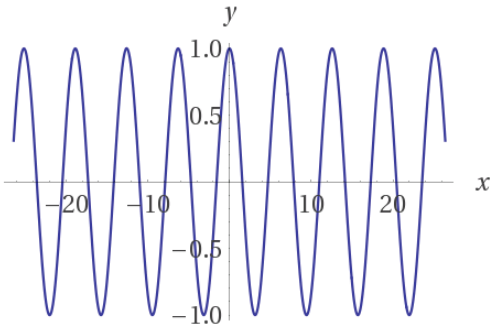




FUNZIONE COSENO

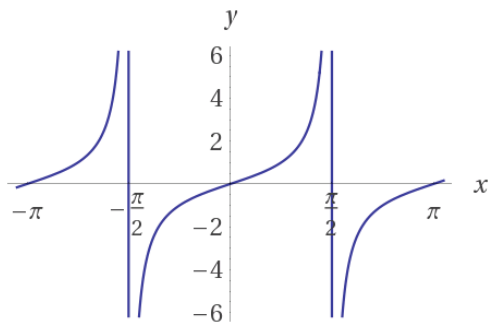
$$y = \cos x$$

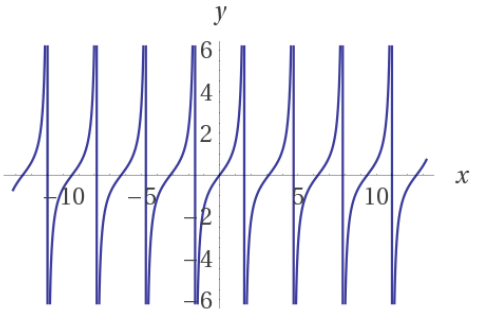




FUNZIONE TANGENTE

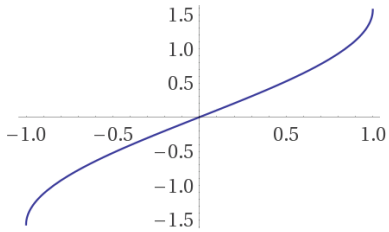
$$y = \tan x$$





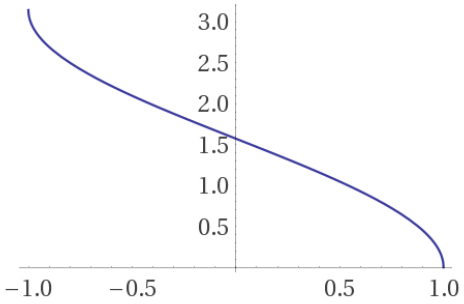
FUNZIONE ARCOSENO

$$y = \sin^{-1} x = \arcsin x \quad f:[-1,1] \to \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$



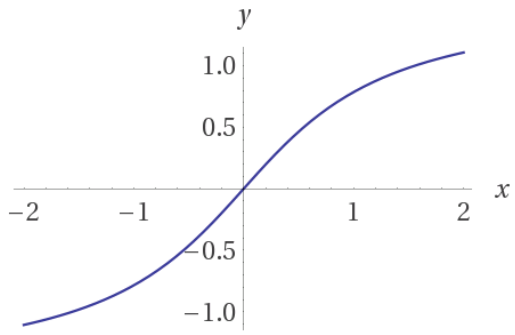
FUNZIONE ARCOCOSENO

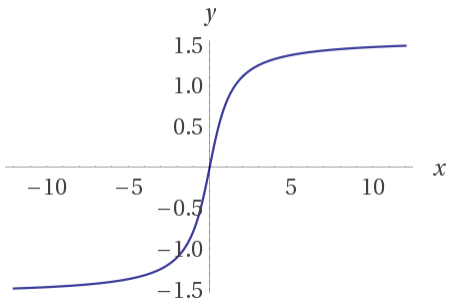
$$y = \cos^{-1} x = \arccos x \quad f:[-1,1] \to [0,\pi]$$



FUNZIONE ARCOTANGENTE

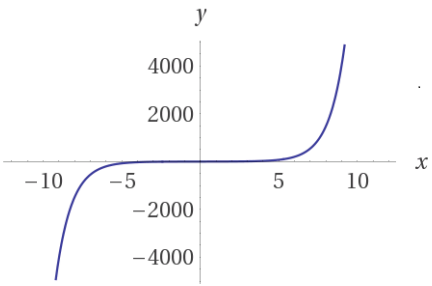
$$y = \tan^{-1} x = \arctan x \quad f:\mathbb{R} \to \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$

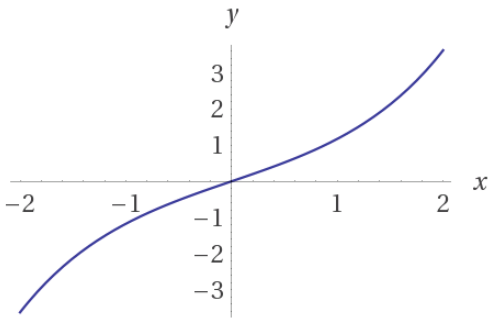




FUNZIONE SENO IPERBOLICO

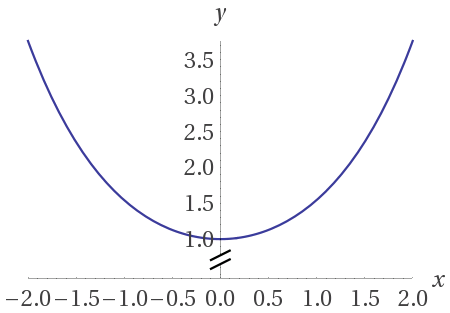
$$y = \sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \qquad f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$





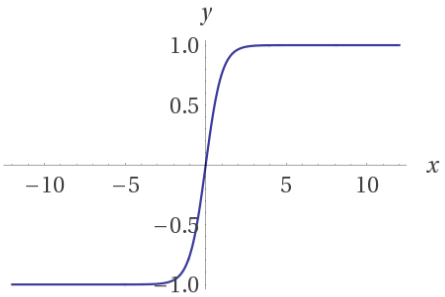
FUNZIONE COSENO IPERBOLICO

$$y = \sinh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \qquad f : \mathbb{R} \to [1, +\infty)$$



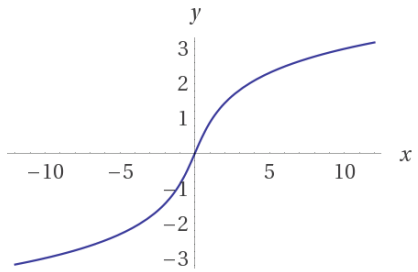
FUNZIONE TANGENTE IPERBOLICA

$$y = \tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x} \qquad f : \mathbb{R} \to [-1,1]$$



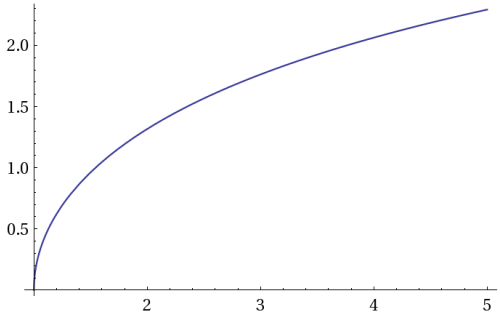
FUNZIONE ARCOSENO IPERBOLICO

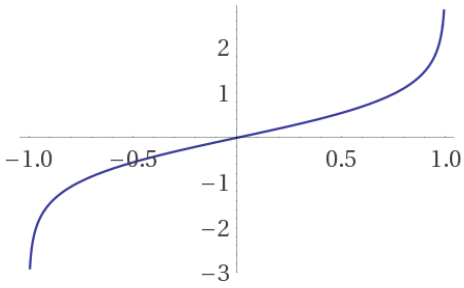
$$y = \sinh^{-1} x = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right) \quad f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$



FUNZIONE ARCOCOSENO IPERBOLICO

$$y = \cosh^{-1} x = \ln\left(x - \sqrt{x^2 - 1}\right) \quad f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$



FUNZIONE ARCOTANGENTE IPERBOLICA

$$y = \tanh^{-1} x = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) \quad f : [-1,1] \to \mathbb{R}$$