Esercizio 1

$\boxed{1}$ $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{\sqrt{n^3+4}+n\sqrt{n^4e^{-n}+4n}}{\sqrt{n}\ln(n^4+\sqrt{e^n+4})} =$

[1] $+\infty$ [2] 8
[3] $5/2$ [4] 6

Svolgimento:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt{n^3+4}+n\sqrt{n^4e^{-n}+4n}}{\sqrt{n}\ln\left(n^4+\sqrt{e^n+4}\right)} \sim$$

$$\sqrt{n^3+4} \sim n^{3/2}$$

$$n^4e^{-n} \to 0$$

$$n\sqrt{n^4e^{-n}+4n} \sim 2n\sqrt{n} = 2n^{3/2}$$

$$n^4+\sqrt{e^n+4} \sim \sqrt{e^n} = e^{n/2}$$

$$\sqrt{n}\ln\left(n^4+\sqrt{e^n+4}\right) \sim \sqrt{n}\ln\left(e^{n/2}\right) = \sqrt{n}\,\frac{n}{2}\ln e = \frac{n^{3/2}}{2}$$

$$\sim \lim_{n\to+\infty} \frac{n^{3/2}+2n^{3/2}}{\frac{n^{3/2}}{2}} = \frac{3}{\frac{1}{2}} = 6$$

La risposta corretta è la $[4]$

Esercizio 2

$\boxed{2}$ $\int_1^{+\infty} x^{-2} \ln(2x-1)dx =$

[1] $\ln 4$ [2] $(3/2)(\ln 4)$
[3] $4\ln 2$ [4] $+\infty$

Svolgimento:

$$\int_1^{+\infty} x^{-2}\ln(2x-1)\,dx =$$

$$=\left[\frac{x^{-1}}{-1}\ln(2x-1)\right]_1^{+\infty} - \int_1^{+\infty}\frac{x^{-1}}{-1}\frac{2}{2x-1}dx = \left[-\frac{1}{x}\ln(2x-1)\right]_1^{+\infty} + 2\int_1^{+\infty}\frac{1}{(2x-1)x}dx =$$

Aggiungo e sottraggo $2x$ al numeratore.

$$=\left[-\frac{1}{x}\ln(2x-1)\right]_1^{+\infty} + 2\int_1^{+\infty}\frac{1-2x+2x}{(2x-1)x}dx = \left[-\frac{1}{x}\ln(2x-1)\right]_1^{+\infty} + 2\int_1^{+\infty}\frac{1-2x}{(2x-1)x}+\frac{2x}{(2x-1)x}dx$$

$$=\left[-\frac{1}{x}\ln(2x-1)\right]_1^{+\infty} + 2\int_1^{+\infty}-\frac{1}{x}+\frac{2}{2x-1}dx = \left[-\frac{1}{x}\ln|2x-1| - 2\ln|x| + 2\ln|2x-1|\right]_1^{+\infty} =$$

$$=\lim_{M\to+\infty}\left[-\frac{1}{x}\ln|2x-1| + 2\ln\left|\frac{2x-1}{x}\right|\right]_1^{M} =$$

$$=\lim_{M\to+\infty}\left(-\frac{1}{M}\ln|2M-1| + 2\ln\left|\frac{2M-1}{M}\right|\right) = 2\ln 2 = \ln 4$$

La risposta corretta è la $[1]$

Esercizio 3

$\boxed{3}$ Determinare il parametro a cosicché la funzione $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ definita da $f(x) = e^{ax} - 1$ se $x > 0$ e $f(x) = 4x - x^2$ per $x \leq 0$ sia derivabile in tutta la retta reale.

[1] $a = 2$ [2] $a = 0$

[3] $a = 4$ [4] $a = -2$

Svolgimento:

$$f(x) = \begin{cases} e^{ax} - 1 & se \ \ x > 0 \\ 4x - x^2 & se \ x \leq 0 \end{cases}$$

Verifico la continuità in $x = 0$

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} e^{ax} - 1 = 0$$

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} 4x - x^2 = 0 = f(0)$$

La funzione è continua $\forall a \in \mathbb{R}$. A questo punto verifico la derivabilità. Per fare ciò avendo appurato che la funzione è continua in $x = 0$ allora si può utilizzare il teorema sulla derivabilità di funzioni continue secondo il quale la funzione è derivabile in $x = 0$ se $\lim_{x \to 0^+} f'(x) = \lim_{x \to 0^-} f'(x)$ senza dover utilizzare il limite del rapporto incrementale.

$$f'(x) = \begin{cases} a\,e^{ax} & se \ \ x > 0 \\ 4 - 2x & se \ x \leq 0 \end{cases}$$

$$\lim_{x \to 0^+} f'(x) = \lim_{x \to 0^+} a\,e^{ax} = a$$

$$\lim_{x \to 0^-} f'(x) = \lim_{x \to 0^+} 4 - 2x = 4$$

Da cui la funzione è derivabile se $a = 4$.

La risposta corretta è la $[3]$

Esercizio 4

$\boxed{4}$ Sia $a + ib = (\sqrt{3} + i)^{19}$. Allora:

[1] $a < 0, b > 0$

[2] $a > 0, b > 0$

[3] $a < 0, b < 0$

[4] $a > 0, b < 0$

Svolgimento:

$$a + ib = \left(\sqrt{3} + i\right)^{19}$$

Posto $z_0 = \sqrt{3} + i$ si ha che $|z_0| = \sqrt{3+1} = 2$, $\arg\{z_0\} = \arctan\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\pi}{6}$

$$z_0 = 2\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)$$

A questo punto si utilizza la formula di De Moivre per calcolare z_0^{19}

$$a + ib = \left(\sqrt{3} + i\right)^{19} = 2^{19}\left(\cos\frac{19}{6}\pi + i\sin\frac{19}{6}\pi\right)$$

A questo punto si guarda a cosa corrisponde l'angolo $\frac{19}{6}\pi$. Per fare ciò si nota che

$$\frac{19}{6}\pi = \frac{12+7}{6}\pi = 2\pi + \frac{7}{6}\pi \ .$$

Da cui si ottiene che:

$$a + ib = 2^{19}\cos\frac{7}{6}\pi + i\ 2^{19}\sin\frac{7}{6}\pi = 2^{19}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + i\,2^{19}\left(-\frac{1}{2}\right)$$

E quindi:

$$a = -\frac{\sqrt{3}}{2} < 0 \ , \ \ b = -\frac{1}{2} < 0$$

La risposta corretta è la $[3]$.

Esercizio 5

$\boxed{5}$ $\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+4x}-x\cos(1/\sqrt{x}))=$

[1] $-7/2$ [2] $+\infty$

[3] $5/2$ [4] 0

Svolgimento:

$$\lim_{x\to+\infty}\left[\sqrt{x^2+4x}-x\cos\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)\right]=\lim_{x\to+\infty}\left[x\sqrt{1+\frac{4}{x}}-x\cos\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)\right]\sim$$

Per approssimare i termini nel limite si utilizzano gli sviluppi di Taylor.

$$\sqrt{1+\frac{4}{x}}=1+\frac{1}{2}\left(\frac{4}{x}\right)+o\left(\frac{1}{x}\right)=1+\frac{2}{x}+o\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$\cos\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)=1-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2+o\left(\frac{1}{x}\right)=1-\frac{1}{2x}+o\left(\frac{1}{x}\right)$$

E infine:

$$\sim\lim_{x\to+\infty}\left[x\left(1+\frac{2}{x}\right)-x\left(1-\frac{1}{2x}\right)\right]=2+\frac{1}{2}=\frac{5}{2}$$

La risposta corretta è la $[3]$

Esercizio 6

$\boxed{6}$ Sia $f : [0, +\infty[\to \mathbf{R}$ di classe C^1 e tale che $f(0) = 0$. Quale delle seguenti condizioni è sufficiente affinché f ammetta minimo assoluto su $[0, +\infty[$?

[1] $f'(0) < 0$

[2] $\lim_{x\to+\infty} f(x) > 0$

[3] $f'(0) > 0$

[4] $\lim_{x\to+\infty} f(x) < 0$

Svolgimento:

Ipotesi 1: $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ di classe C^1

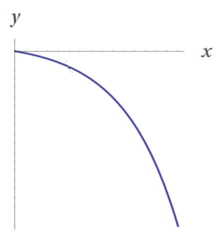
Ipotesi 2: $f(0)=0$.

Ipotesi 3: ???

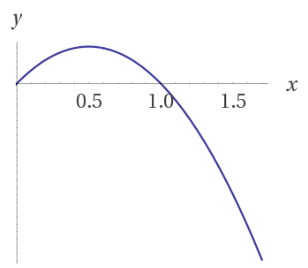
Tesi: f ammette sicuramente minimo assoluto in $(0,+\infty)$?

Quale ipotesi bisogna aggiungere per essere sicuri che si verifichi la tesi?

$[1]$ $f'(0)<0 \Rightarrow$ equivale a dire che la funzione in prossimità dell'origine è decrescente. Questa condizione non è sufficiente perché non pone nessun limite sull'andamento della funzione per $x\to+\infty$. Si può avere quindi $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$ che contraddirebbe la tesi. Si può escludere quindi anche la risposta $[4]$



$[3]$ $f'(0)>0 \Rightarrow$ equivale a dire che la funzione in prossimità dell'origine è crescente. Anche questa condizione come prima non è sufficiente perché non pone nessun limite sull'andamento della funzione per $x\to+\infty$. Si può avere quindi $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$ che contraddirebbe la tesi.



La risposta $[2]$ è corretta.

Dimostrazione:

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) > 0$. Dal teorema della permanenza del segno, si ha che $\exists M > 0 : f(x) > 0 \;\; \forall x > M$.

Fissato un intervallo un intervallo $[0,\overline{x}]$ con $\overline{x} > M$ allora per Weierstress la funzione ammette minimo assoluto in tale intervallo, e si ha che $\min\limits_{x\in[0,\overline{x}]} f(x) \leq 0$ visto che $f(0) = 0$. D'altronde $f(x) > 0 \;\forall x > \overline{x}$ e quindi: $\min\limits_{x\in[0,\overline{x}]} f(x) = \min\limits_{x\in[0,+\infty)} f(x)$.

Esercizio 7

$\boxed{7}$ Sia $f(x) = (2x+1)/\sqrt{x^2+2x}$ definita nel proprio campo di esistenza. Del valore di minimo assoluto di f su $]0,+\infty[$ si può dire che:

[1] vale $2\sqrt{2/3}$
[2] vale $\sqrt{3}$
[3] non esiste, ma $\inf_{x>0} f(x) = 2$
[4] vale $4/\sqrt{5}$

Svolgimento:

$$f(x) = \frac{2x+1}{\sqrt{x^2+2x}}$$

Minimo assoluto su $I = (0,+\infty)$.

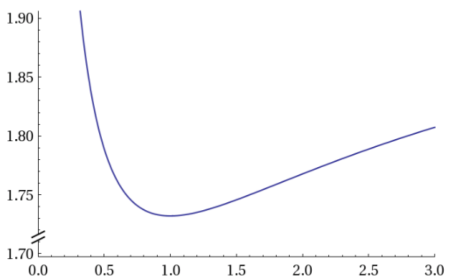
Verifico che è definita su tutto l'intervallo I : Bisogna porre $x^2+2x>0 \Rightarrow x<-2 \vee x>0$. Faccio i limiti ai bordi dell'intervallo

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{2x+1}{\sqrt{x^2+2x}} = 2 \ , \ \lim_{x\to 0^+} \frac{2x+1}{\sqrt{x^2+2x}} = +\infty$$

Studio la derivata prima:

$$\frac{d}{dx}\frac{2x+1}{\sqrt{x^2+2x}} = \frac{x-1}{(x^2+2x)\sqrt{x^2+2x}} > 0 \quad \Rightarrow \quad x-1>0 \ \Rightarrow \ x>1$$

Il minimo assoluto della funzione è in $x=1$ e vale $f(1) = \frac{3}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}$.



La risposta corretta è la $[2]$

Esercizio 8

$\boxed{8}$ Sia $A = \left\{ (-1)^n + \frac{n}{n+1} : \quad n \in \mathbf{N} \right\}$. Allora

[1] A chiuso
[2] A ammette massimo
[3] $\mathrm{acc(A)} = \{\pm 1\}$
[4] $0 \in \mathrm{acc(A)}$

Svolgimento:

$$A = \left\{ (-1)^n + \frac{n}{n+1} : \ n \in \mathbb{N} \right\}$$

$(-1)^n + \dfrac{n}{n+1}$ può essere divisa in due sottosuccessioni:

Per n pari, si ha: $1 + \dfrac{n}{n+1} = \dfrac{2n+1}{n+1} \Rightarrow \left\{ \dfrac{5}{3}, \dfrac{9}{5}, \dfrac{13}{7}, \ldots \right\} \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{2n+1}{n+1} = 2$

Per n dispari, si ha: $-1 + \dfrac{n}{n+1} = \dfrac{-1}{n+1} \Rightarrow \left\{ -\dfrac{1}{2}, -\dfrac{1}{4}, -\dfrac{1}{6}, \ldots \right\} \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{-1}{n+1} = 0$

$acc\,A = \{0, 2\} \notin A \Rightarrow A$ non è chiuso.

Si ha che $\sup A = 2 \notin A \Rightarrow$ non c'è il massimo.

$-1 \notin accA$

Mentre è vero che $0 \in accA$, quindi **la risposta corretta è la** $[4]$.

Esercizio 9

$\boxed{9}$ $\int_1^4 \sin(\pi\sqrt{x})dx =$

[1] $-6/\pi$ [2] $(2-3\pi)/\pi$

[3] $-4/\pi$ [4] $(4-6\pi)/\pi^2$

Svolgimento:

$$\int_1^4 \sin\left(\pi\sqrt{x}\right)dx =$$

Cambio di variabile $\pi\sqrt{x} = t \Rightarrow \pi^2 x = t^2 \Rightarrow dx = \frac{2t}{\pi^2}dt$

Gli estremi diventano: $x = 1 \Rightarrow t = \pi$, $x = 4 \Rightarrow t = 2\pi$

$$= \frac{2}{\pi^2}\int_\pi^{2\pi} t\sin t \; dt = \left[-\frac{2}{\pi^2}t\cos t\right]_\pi^{2\pi} + \frac{2}{\pi^2}\int_\pi^{2\pi}\cos t \; dt = -\frac{2}{\pi^2}2\pi - \frac{2}{\pi^2}\pi + \left[\frac{2}{\pi^2}\sin t\right]_\pi^{2\pi} = -\frac{6}{\pi}$$

La risposta corretta è la $[1]$

Esercizio 10

$\boxed{10}$ Date le due serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{4^n+1}}{4^{\sqrt{n}}+2^n}$, $\sum_{n=1}^{\infty} \sin^2\left(\frac{2n+5}{\sqrt[3]{n^5+4}}\right)$, quale delle due converge?

[1] entrambe
[2] nessuna delle due
[3] soltanto la seconda
[4] soltanto la prima

Svolgimento:

Nella prima serie manca la condizione necessaria alla convergenza visto che la successione non tende a zero.

$$\frac{\sqrt{4^n+1}}{4^{\sqrt{n}}+2^n} \sim \frac{\sqrt{4^n}}{2^n} \to 1$$

La seconda invece:

$$\sin^2\left(\frac{2n+5}{\sqrt[3]{n^5+4}}\right) \sim \left(\frac{2n+5}{\sqrt[3]{n^5+4}}\right)^2 \sim \frac{4n^2}{n^{10/3}} = \frac{4}{n^{4/3}}$$

Converge per confronto con la serie armonica generalizzata con $\alpha = 4/3$. Delle due converge solo la seconda.

La risposta corretta è la $[3]$

Esercizio 11

$\boxed{11}$ Sia $f(x) = (2x+1)/\sqrt{x^2+2x}$ definita nel proprio campo di esistenza. Gli asintoti distinti di f sono
[1] tre: due verticali ed uno obliquo
[2] quattro: due verticali e due orizzontali
[3] due: uno verticale ed uno orizzontale
[4] tre: due verticali ed uno orizzontale

Svolgimento:

$$f(x) = \frac{2x+1}{\sqrt{x^2+2x}}.$$

Per il dominio bisogna porre $x^2+2x>0 \Rightarrow x<-2 \vee x>0$. Faccio i limiti ai bordi del dominio:

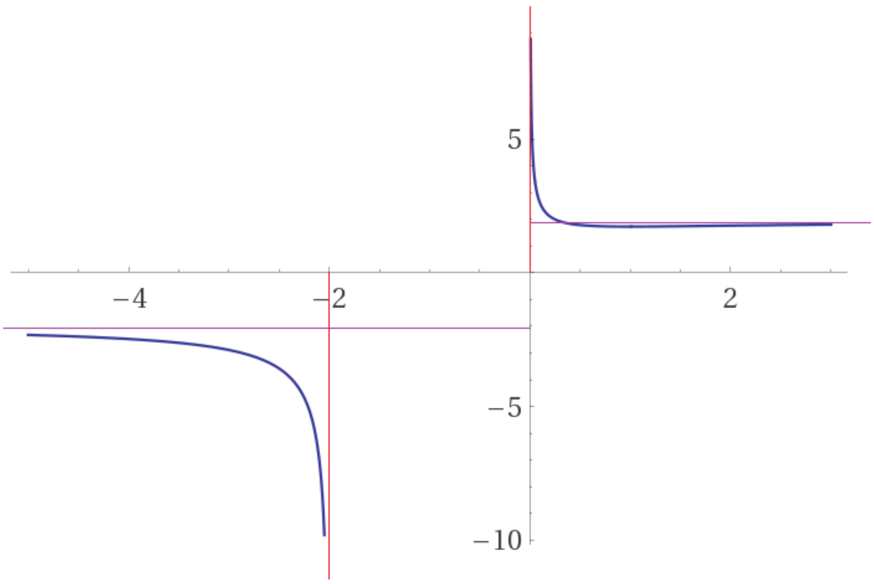
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{2x+1}{\sqrt{x^2+2x}} = 2 \Rightarrow \text{ asintoto orizzontale } y=2$$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{2x+1}{\sqrt{x^2+2x}} = -2 \Rightarrow \text{ asintoto orizzontale } y=-2$$

$$\lim_{x\to0^+} \frac{2x+1}{\sqrt{x^2+2x}} = +\infty \Rightarrow \text{ asintoto verticale } x=0$$

$$\lim_{x\to-2^-} \frac{2x+1}{\sqrt{x^2+2x}} = \frac{-3}{0^+} = -\infty \Rightarrow \text{ asintoto verticale } x=2$$

Pertanto ci sono due asintoti verticali e due orizzontali.



la risposta corretta è la $[2]$