STUDIO

DI

FUNZIONI

STUDIO DI FUNZIONI

DOMINIO DI UNA FUNZIONE REALE

In generale, nello studio di funzioni, si ha a che fare con funzioni che sono ottenute come composizione di funzioni elementari.
Il dominio di una funzione reale rappresenta l'insieme delle $x \in \mathbb{R}$ dove la funzione è definita.
Qualora non venga specificato la funzione è implicitamente definita su tutto l'asse dei reali $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. In tal caso si parla di **dominio naturale**. Qualora invece la funzione viene esplicitamente definita su un certo insieme $A \subset \mathbb{R}$, ovvero si ha che $f : A \to \mathbb{R}$, allora in tal caso bisogna limitare il dominio naturale all'insieme A , allora il dominio della funzione $f(x)$ è dato dall'intersezione tra il dominio naturale e l'insieme A .
La regola per il calcolo del dominio naturale di una funzioni composta è la seguente:
Supponiamo che $f(x)$ ha come dominio naturale D_f e $g(x)$ ha come dominio naturale D_g .
La funzione $f(g(x))$ avrà come dominio: $D = D_g \cap \{D_f \cap f(D_g)\}$.
In altri termini il dominio di $f(g(x))$, è dato dalle $x \in \mathbb{R}$ per le quali la funzione più interna $g(x)$ è definita, e dalle $x \in \mathbb{R}$ per cui l'immagine della funzione più interna cade nel dominio di f . Tale condizione si traduce nel sistema:

$$\begin{cases} x \in D_g \\ g(x) \in D_f \end{cases}$$

In generale è possibile incontrare anche composizioni multiple di funzioni come $f_1(f_2(f_3(x)))$, in tal caso la regola va applicata per ognuna delle composizioni risultanti:

$$\begin{cases} x \in D_{f_3} \\ f_3(x) \in D_{f_2} \\ f_2(f_3(x)) \in D_{f_1} \end{cases}$$

In generale le condizioni da imporre per ottenere il dominio di una generica funzione ottenuta come composizione di funzioni elementari sono riportate in seguito:

Porre l'argomento di radici di indice dispari maggiore o uguale a zero.

$$\sqrt[n]{f(x)} \qquad \begin{matrix} Se\ \ n\, è\, pari: \ f(x) \geq 0 \\ Se\ \ n\, è\, dispari: \ \forall x \in \mathbb{R} \end{matrix}$$

Porre l'argomento di logaritmi maggiore di zero.

$$\log_a f(x) \quad \Rightarrow \quad f(x) > 0$$

Porre il denominatore di eventuali frazioni diverso da zero.

$$\frac{1}{f(x)} \quad \Rightarrow \quad f(x) \neq 0$$

Porre l'argomento della tangente diverso da multipli di $\frac{\pi}{2}$.

$$\tan f(x) \quad \Rightarrow \quad f(x) \neq k\frac{\pi}{2} \quad k \in \mathbb{Z}$$

Quando la x compare sia alla base che all'esponente, porre la base maggiore di zero.

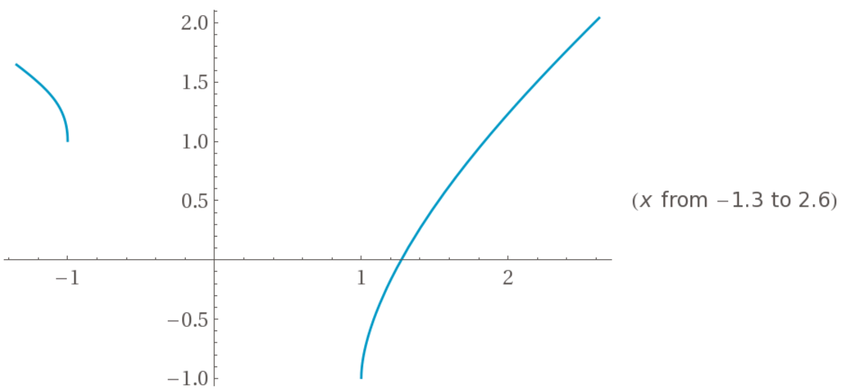
$$\left[f(x)\right]^{g(x)} \quad \Rightarrow \quad f(x) > 0$$

Esempio 1

$$f(x) = \sqrt{x^2 - 1} - \frac{1}{x}$$

Si può facilmente osservare che la funzione presenta una radice e una frazione, quindi bisogna imporre due condizioni:

$$\begin{cases} x^2 - 1 \geq 0 \\ x \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \leq -1 \vee x \geq 1 \\ x \neq 0 \end{cases} \Rightarrow D = (-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$$

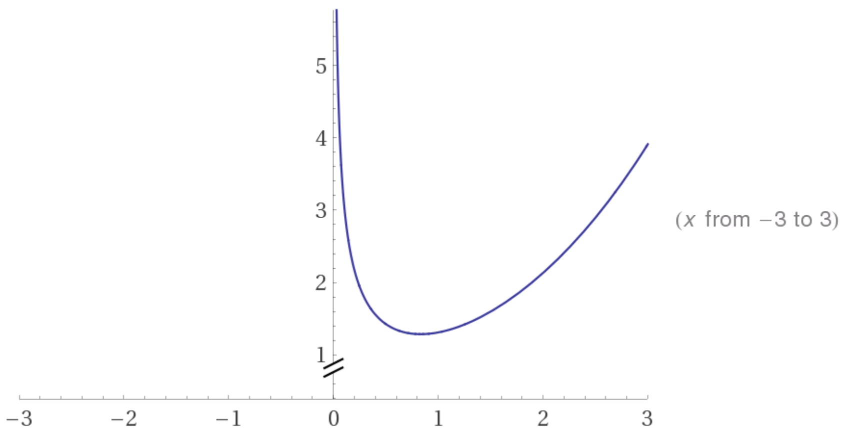


Esempio 2

$$f(x) = \frac{-x + e^x}{\sqrt{e^x - 1}}$$

Nella funzione sono presenti un denominatore e una radice, anche in questo caso vanno poste due condizioni: denominatore diverso da zero ed argomento della radice maggiore o uguale a zero. Le due condizioni si possono accorpare in un'unica condizione:

$$e^x - 1 > 0 \quad \Rightarrow \quad e^x > 1 \quad \Rightarrow \quad x > 0 \quad \Rightarrow \quad D = \mathbb{R}^+$$

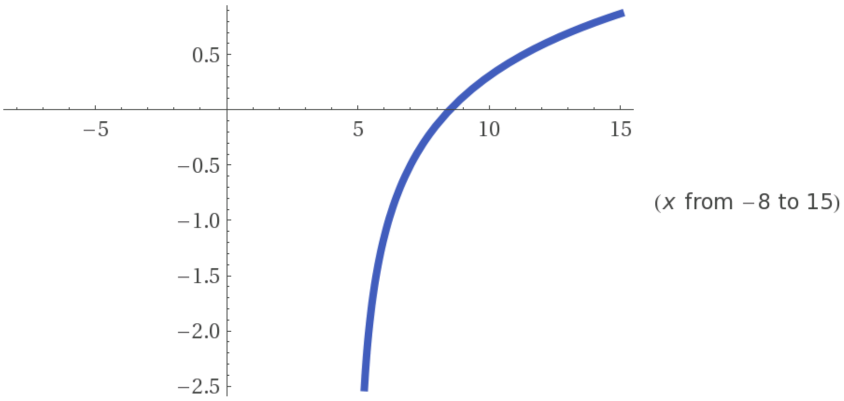


Esempio 3

$$f(x)=\ln\left(\sqrt{2x-1}-3\right)$$

Il sistema da imporre è il seguente:

$$\begin{cases}2x-1\geq 0\\ \sqrt{2x-1}-3>0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x\geq\frac{1}{2}\\ \sqrt{2x-1}>3\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x\geq\frac{1}{2}\\ 2x-1>9\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x\geq\frac{1}{2}\\ x>4\end{cases}\Rightarrow D=(4,+\infty)$$



Esempio 4

$$f(x)=\ln\left(\sqrt{1-2x}-x\right)$$

Il sistema da imporre è il seguente:

$$\begin{cases}1-2x\geq 0\\ \sqrt{1-2x}-x>0\end{cases}$$

La disequazione irrazionale da luogo a sua volta all'unione di due sistemi.

$$\begin{cases} x \le \dfrac{1}{2} \\ \begin{cases} 1-2x < x^2 \\ x \ge 0 \end{cases} \cup \{x < 0 \end{cases}$$

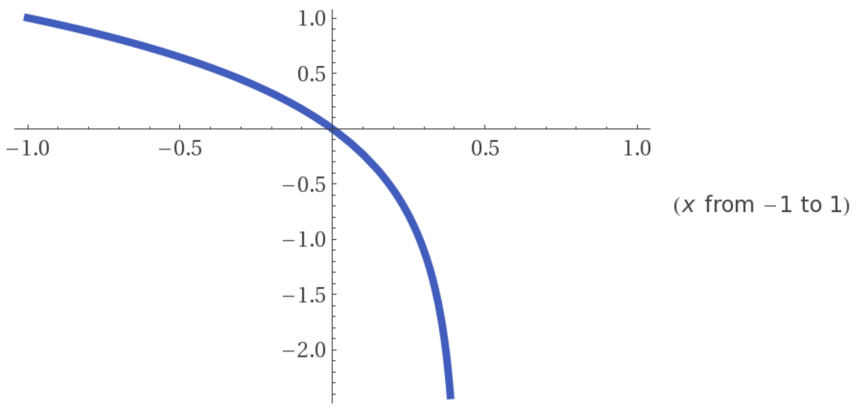
Risolvendo a parte la disequazione di secondo grado:

$$1-2x > x^2 \;\Rightarrow\; -x^2-2x+1>0 \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_1 = \frac{2-\sqrt{8}}{-2} = -1+\sqrt{2},\; x_2 = \frac{2+\sqrt{8}}{-2} = -1-\sqrt{2} \;\Rightarrow\; -1-\sqrt{2} < x < -1+\sqrt{2}$$

$$\begin{cases} x \le \dfrac{1}{2} \\ \begin{cases} -1-\sqrt{2} < x < -1+\sqrt{2} \\ x \ge 0 \end{cases} \cup \{x < 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \le \dfrac{1}{2} \\ 0 \le x < -1+\sqrt{2} \;\vee\; x<0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \le \dfrac{1}{2} \\ x < \sqrt{2}-1 \end{cases} \Rightarrow\; x < \sqrt{2}-1 \approx 0.414$$



SIMMETRIE

Dopo lo studio del dominio è molto utile verificare eventuali simmetrie. Per fare ciò bisogna calcolare $f(-x)$. Se si ha che $f(-x) = f(x)\;\forall x \in \mathbb{R}$ allora la funzione risulta **pari** e pertanto la funzione è **simmetrica rispetto all'ordinata**. Se si verifica che $f(-x) = -f(x)\;\forall x \in \mathbb{R}$ allora la funzione risulta **dispari**, ovvero è **simmetrica rispetto all'origine**.

Qualora una delle due condizioni risulta verificata, allora è possibile studiare la funzione soltanto sul semiasse positivo delle x , ovvero per $x > 0$ e completare lo studio e il disegno del grafico per simmetria.

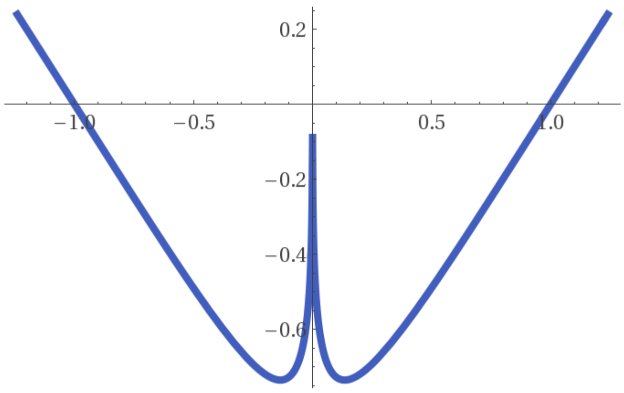
Esempio 1

$$f(x)=\sqrt{|x|}\,\ln|x|$$

Ponendo:

$$f(-x)=\sqrt{|-x|}\,\ln|-x|=\sqrt{|x|}\,\ln|x|=f(x)$$

Si osserva che la funzione è pari, quindi simmetrica rispetto all'origine



(x from −1.2 to 1.2)

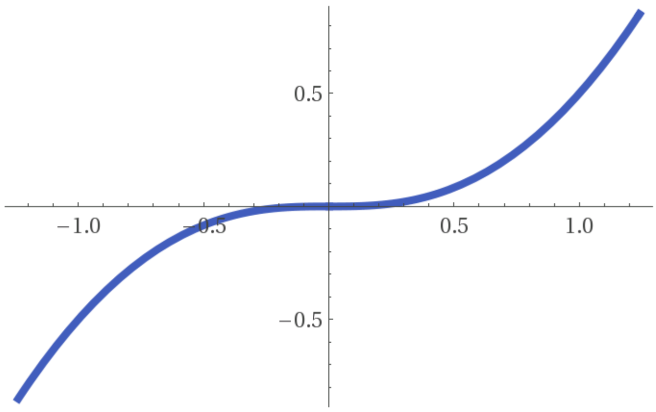
Esempio 2

$$f(x)=\frac{x^3}{|x|+1}$$

Ponendo:

$$f(-x)=\frac{(-x)^3}{|-x|+1}=-\frac{x^3}{|x|+1}=-f(x)$$

In questo caso invece la funzione ha simmetria dispari, quindi simmetrica rispetto all'ordinata:



(x from −1.2 to 1.2)

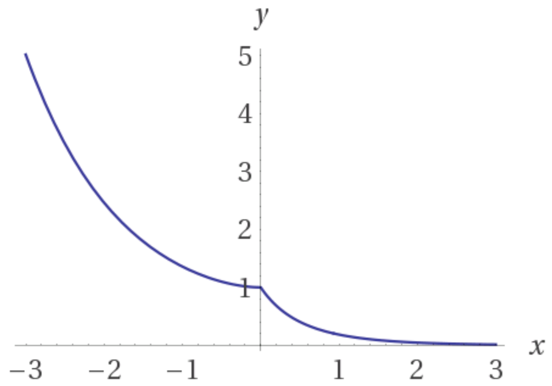
Esempio 3

$$f(x)=\frac{e^{-x}}{|x|+1}$$

Ponendo:

$$f(-x)=\frac{e^x}{|-x|+1}=\frac{e^x}{|x|+1}$$

In questo caso si osserva invece che non esiste alcuna simmetria.



STUDIO DEL SEGNO E INTERSEZIONE CON GLI ASSI

Per eseguire lo studio del segno della funzione porre $f(x)>0$. La soluzione della disequazione permette di calcolare gli intervalli del dominio in cui la funzione risulta positiva, e per esclusione anche gli intervalli in cui la funzione risulta negativa.

Per l'**intersezione con l'ordinata** porre $f(0)$.

Per l'**intersezione con l'ascissa** invece $f(x)=0$, le soluzioni dell'equazione prendono il nome di **zeri della funzione**.

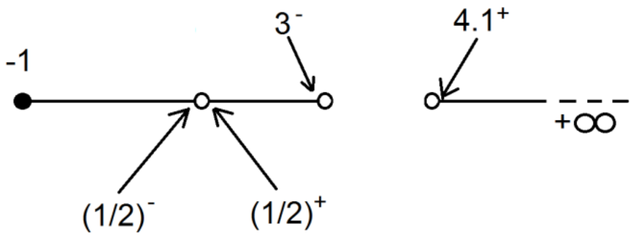
COMPORTAMENTO ASINTOTICO

Per studiare il comportamento asintotico di una funzione ottenuta come composizione di funzioni elementari bisogna calcolare i limiti ai bordi del dominio.

Per bordi del dominio si intende $\pm\infty$ quando sono compresi nel dominio, e gli estremi degli intervalli quando sono esclusi dal dominio.

Ad esempio supponiamo che il dominio di una certa funzione sia dato da

$$Dom\ f=\left[-1,\frac{1}{2}\right)\cup\left(\frac{1}{2},3\right)\cup(4.1,+\infty)$$



I limiti andranno calcolati nei punti $\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^-, \left(\frac{1}{2}\right)^+, 3^-, 4.1^+, +\infty\right\}$. Non è in generale necessario calcolare il $\lim_{x\to 1^+} f(x)$, perché la funzione essendo definita in $x=-1$ è possibile calcolarne esplicitamente il valore $f(-1)$.

Quando si ha a che fare invece con funzioni a tratti. Allora bisogna valutare la continuità in corrispondenza dei punti che uniscono tra di loro tratte adiacenti.

Esempio 1

$$f(x)=\frac{\sqrt{e^x-1}}{e^x-e}$$

Il dominio è $Dom\ f=[0,1)\cup(1,+\infty)$ ed il limiti vanno calcolati a $\{1^-,1^+,+\infty\}$

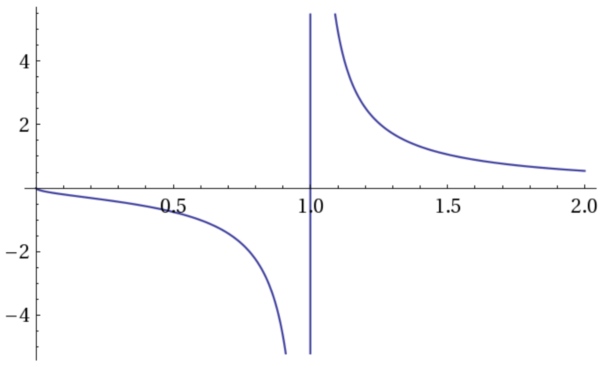
$$\lim_{x\to 1^-} f(x)=\frac{\sqrt{e}-1}{e^- -e}\approx\frac{0.31}{0^-}=-\infty$$

$$\lim_{x\to 1^+} f(x)=\frac{\sqrt{e}-1}{e^+ -e}\approx\frac{0.31}{0^+}=+\infty$$

Quindi la retta $x=1$ è un asintoto verticale bilatero.

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{e^x-1}}{e^x-e}\sim\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{e^x}}{e^x}=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\sqrt{e}}{e}\right)^x=0$$

Quindi la retta $y=0$ è un asintoto orizzontale monolatero.



Esempio 2

$$f(x)=\frac{e^{-x}}{|x|+1}$$

Il dominio è $Dom\ f=\mathbb{R}$ ed il limiti vanno calcolati a $\{+\infty,-\infty\}$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{-x}}{|x|+1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{-x}}{x+1}=0$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{e^{-x}}{|x|+1}=\lim_{x\to-\infty}\frac{e^{-x}}{-x+1}=\lim_{t\to+\infty}\frac{e^{t}}{t+1}=+\infty$$

La retta $y=0$ è un asintoto orizzontale monolatero destro.

Si osserva che la funzione è definita a tratti per effetto del valore assoluto.

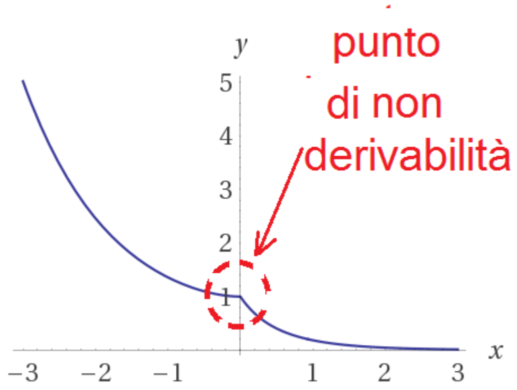
$$f(x)=\frac{e^{-x}}{|x|+1}=\begin{cases}\dfrac{e^{-x}}{x+1} & se\ \ x\geq 0\\[2mm] \dfrac{e^{-x}}{-x+1} & se\ \ x<0\end{cases}$$

Valutiamo la continuità nel punto $x=0$. Si ha che $\lim_{x\to 0} f(x)=1=f(0)$ quindi la funzione è continua. Va allora valutata la derivabilità.

$$f'(x)=\begin{cases}-\dfrac{e^{-x}(2+x)}{(x+1)^2} & se\ \ x\geq 0\\[2mm] \dfrac{e^{-x}\ x}{(x+1)^2} & se\ \ x<0\end{cases}$$

$$\lim_{x\to 0^-} f'(x)=-2\ ,\ \lim_{x\to 0^+} f'(x)=0$$

Quindi la funzione non è derivabile in $x=0$ e si crea un punto angoloso.



In genere valori assoluti di per sé non creano punti di discontinuità visto le due tratte si ricongiungono nel punto in cui l'argomento del valore assoluto è nullo. Essi in genere determinano punti di non derivabilità.

STUDIO LOCALE DI FUNZIONI

Punti stazionari: corrispondono ai punti in cui la derivata prima si annulla o non esiste

$$f'(x_0)=0$$

Ci sono 5 tipi di punti stazionari:

1. Minimo locale
2. Massimo locale
3. Flesso a tangente orizzontale crescente
4. Flesso a tangente orizzontale decrescente
5. La derivata prima non esiste

CRITERIO DELLE DERIVATE SUCCESSIVE

Le derivate sono tutte nulle fino alla (n-1)-esima:

$$f'(x_0)=f''(x_0)=f'''(x_0)=...=f^{(n-1)}(x_0)=0 \quad e \quad f^{(n)}(x_0)\neq 0$$

Allora

$$\begin{cases} se\ \ n\ è\ pari & \Rightarrow \begin{cases} se\ \ f^{(n)}(x_0)>0 \ \Rightarrow \ \min\ locale \\ se\ \ f^{(n)}(x_0)<0 \ \Rightarrow \ \max\ locale \end{cases} \\ se\ \ n\ è\ dispari & \Rightarrow \begin{cases} se\ \ f^{(n)}(x_0)>0 \ \Rightarrow \ flesso\ a\ \tan\ orizzontale\ crescente \\ se\ \ f^{(n)}(x_0)<0 \ \Rightarrow \ flesso\ a\ \tan\ orizzontale\ decrescente \end{cases} \end{cases}$$

Esempio

Catalogare il punto stazionario in $x_0=0$ della funzione $y=\sin^8 x-x^8$.

Innanzi tutto bisogna verificare che il punto $x_0=0$ si tratta di un punto stazionario.

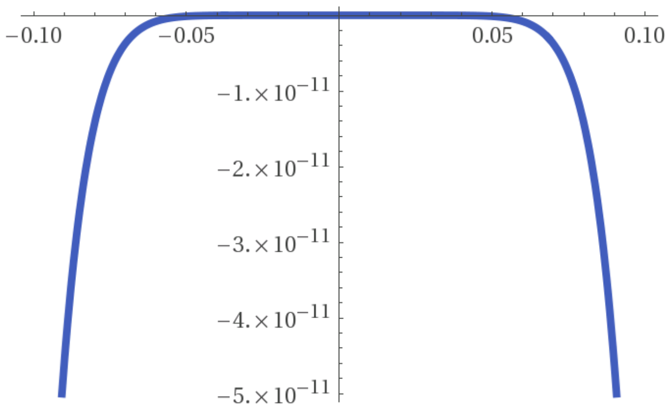
$$y'=8\sin^7 x\cos x+8x^7 \ \Rightarrow y'(0)=0$$

Bisogna individuare calcolare la prima derivata non nulla in $x_0=0$. Per fare ciò è possibile sfruttare lo sviluppo di Taylor della funzione $y=\sum_n \frac{y^{(n)}(0)}{n!}x^n$

$$(\sin x)^8=\left(x-\frac{x^3}{6}+...\right)^8=x^8-8\frac{x^{10}}{6}+o\left(x^{10}\right)=$$

$$y=\sin^8 x-x^8=x^8-\frac{4}{3}x^{10}-x^8+o\left(x^{10}\right)=-\frac{4}{3}x^{10}+o\left(x^{10}\right)$$

La prima derivata non nulla è di ordine 10 e risulta negativa $f^{(10)}(0) = -\frac{4}{3}$, quindi il punto in questione si tratta di un punto di punto di massimo locale.



(x from −0.1 to 0.1)

STUDIO DEL SEGNO DELLA DERIVATA PRIMA

Studio locale della **monotonia**:

1. funzione strettamente crescente in x_0 $\Rightarrow$ $f'(x_0) > 0$
2. funzione debolmente crescente in x_0 $\Rightarrow$ $f'(x_0) \geq 0$
3. funzione strettamente decrescente in x_0 $\Rightarrow$ $f'(x_0) < 0$
4. funzione debolmente decrescente in x_0 $\Rightarrow$ $f'(x_0) \leq 0$

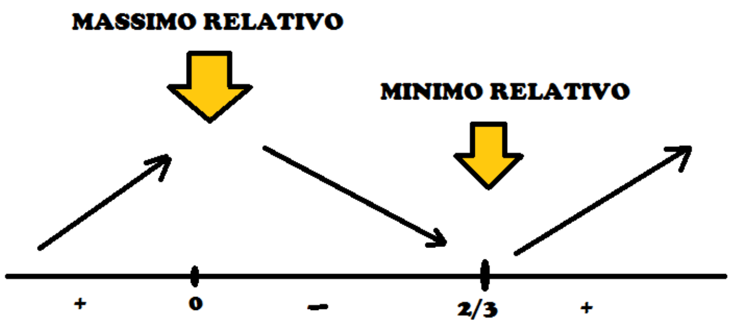
In generale ponendo $f'(x) > 0$ è possibile individuare gli intervalli del dominio sui quali la funzione risulta crescente e per esclusione quelli in cui risulta decrescente. Attraverso questo studio è possibile inoltre catalogare i punti stazionari e individuare eventuali punti di estremo relativi in cui la derivata non si annulla (ovvero quei punti che non rispettano le ipotesi del teorema di Fermat poiché la funzione può non risultare continua o non derivabile).

Esempio:

$$f(x) = x^3 - x^2 + 1$$

Studiamo il segno della derivata prima:

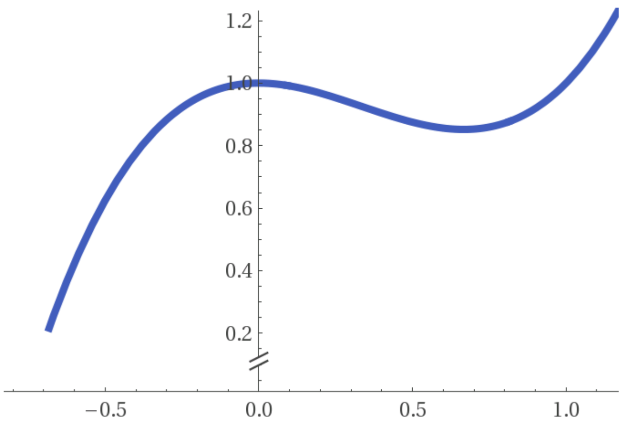
$$f'(x) = 3x^2 - 2x > 0 \Rightarrow x(3x-2) > 0 \Rightarrow x < 0 \vee x < \frac{2}{3}$$



Calcoliamo $f(0)=1$ ed $f\left(\frac{2}{3}\right)=\left(\frac{2}{3}\right)^3-\left(\frac{2}{3}\right)^2+1=\frac{53}{81}\approx 0.654$

Il punto $P_0=(0,1)$ risulta un punto di massimo relativo.

Il punto $P_1=\left(\frac{2}{3},\frac{53}{81}\right)$ risulta un punto di minimo relativo.



(x from −0.8 to 1.2)

STUDIO DEL SEGNO DELLA DERIVATA SECONDA (CONCAVITA')

Dallo studio del segno della derivata seconda si evince il comportamento della funzione dal punto di vista della concavità.

Ricordando che se la derivata seconda non esiste, allora non si ha nessuna informazione sulla concavità della funzione, mentre se la derivata seconda esiste, allora:

$$\begin{cases} Se \quad f''(x)>0 \quad \forall x\in(a,b) \quad Allora\ la\ funzione\, è\, concava\, in\,(a,b) \\ Se \quad f''(x)>0 \quad \forall x\in(a,b) \quad Allora\ la\ funzione\, è\, convessa\, in\,(a,b) \end{cases}$$

In particolare si ha che una funzione risulta concava in un certo intervallo se la derivata seconda risulta negativa, mentre risulta convessa se la derivata seconda è positiva.
Limitando pertanto lo studio del segno della derivata seconda al dominio, è possibile individuare gli intervalli del dominio dove la funzione risulta concava e gli intervalli dove essa risulta convessa.
In alcuni casi, risulta molto difficile studiare il segno della derivata seconda, è possibile comunque fare delle osservazioni basandosi sui limiti per capire il comportamento della funzione dal punto di vista delle concavità. Viceversa qualora lo studio del segno della derivata seconda si riesca a fare, è comunque possibile sfruttare tali osservazioni per verificare la correttezza dei calcoli effettuati.

Punti di flesso: x_0 è un punto di flesso se in esso la funzione è continua, derivabile, $f''(x_0)=0$ e si ha che in corrispondenza in prossimità di tale punto $f''(x_0^+)$ risulta di segno discorde rispetto a $f''(x_0^-)$.

Nota:

Se $f(x_0)$ è un punto di flesso allora $f''(x_0)=0$, ma non è vera l'implicazione inversa. Se $f''(x_0)=0$ non è detto che $f(x_0)$ sia un punto flesso.

DISEGNO DEL GRAFICO

0. Prima cosa bisogna sbarrare il grafico dove non si trova la funzione:
   (*) **Studio del segno:** sbarrare il grafico dove la funzione non è negativa o dove non è positiva.
   (*) **Dominio:** sbarrare il grafico dove non è definita.

1. Tracciare un segno in corrispondenza degli asintoti. Questo permette di capire come si comporta la funzione ai bordi del dominio. Calcolare il valore assunto dalla funzione nei punti in cui si ha un cambio di pendenza (massimi e minimi) e segnarlo sul grafico. Se si ha a che fare con funzioni a tratti verificare la continuità e la derivabilità nei punti che uniscono tratte adiacenti.

2. Tracciare una prima bozza di grafico collegando tra di loro i punti segnati sul grafico cercando di rispettare le pendenze.

3. Ricalcare il grafico rispettando le concavità.

Esempio

$$f(x)=\frac{\ln x}{\ln x-1}$$

Dominio:

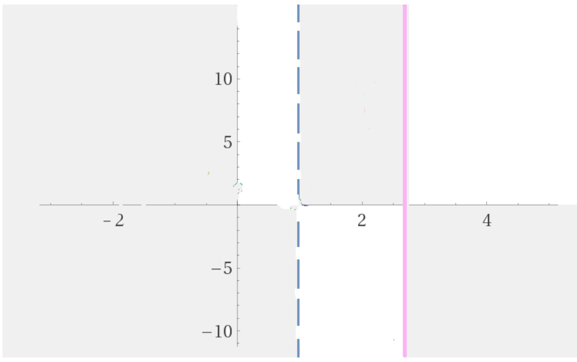
$$\begin{cases} \ln x - 1 \neq 0 \\ x > 0 \end{cases}$$

$$Dom\ f = (0,e) \cup (e,+\infty)$$

Positività

$$\frac{\ln x}{\ln x - 1} > 0 \Rightarrow \ x > e \ \vee \ 0 < x < 1$$

intersezione con gli assi $\ln x = 0 \Rightarrow \ x = 1$



Asintoti

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{\ln x}{\ln x - 1} \sim \lim_{x \to 0^+} \frac{\ln x}{\ln x} = 1$$

$$\lim_{x \to e^-} \frac{\ln x}{\ln x - 1} = \frac{1}{1^- - 1} = \frac{1}{0^-} = -\infty$$

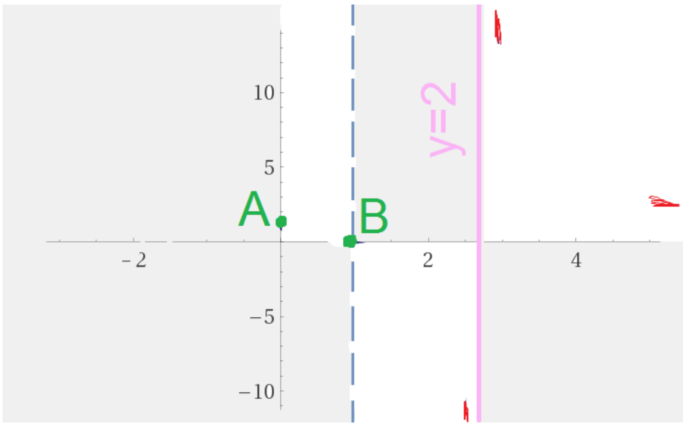
$$\lim_{x \to e^+} \frac{\ln x}{\ln x - 1} = \frac{1}{1^+ - 1} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

$x = e$ è un **asintoto verticale** bilatero.

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{\ln x - 1} \sim \lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{\ln x} = 1$$

$y = 1$ è un **asintoto orizzontale** monolatero.

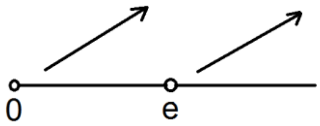
Traccio sul grafico i segni dei limiti trovati. Il punto $A = (0,1)$ è il limite a cui tende il grafico della funzione quando $x \to 0^+$, senza mai essere raggiunto dalla funzione. Il punto $B = (1,0)$ invece corrisponde al punto in cui il grafico della funzione interseca l'asse delle ascisse.

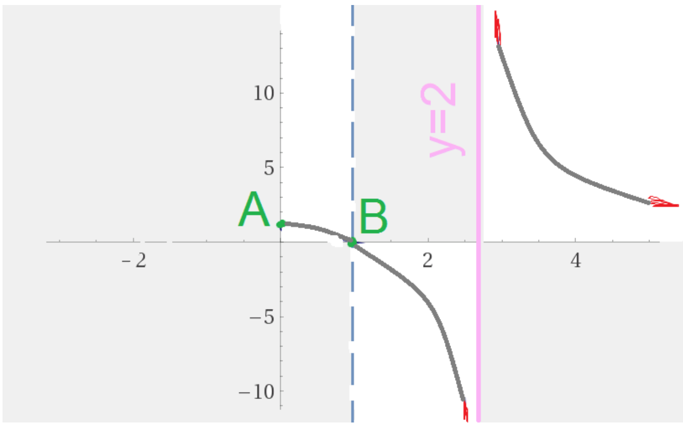


Studio della derivata prima

$$f'(x) = -\frac{1}{x(\log x - 1)^2}$$

Si osserva che la derivata prima risulta sempre negativa sul dominio, pertanto la funzione è sempre decrescente. A questo punto è già possibile tracciare una prima bozza di grafico. In questa fase non si hanno informazioni sulle concavità, quindi è possibile rispettare soltanto dove cresce e dove invece decresce.

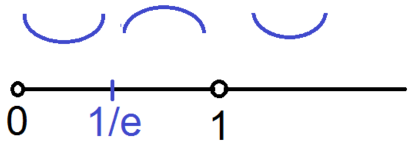




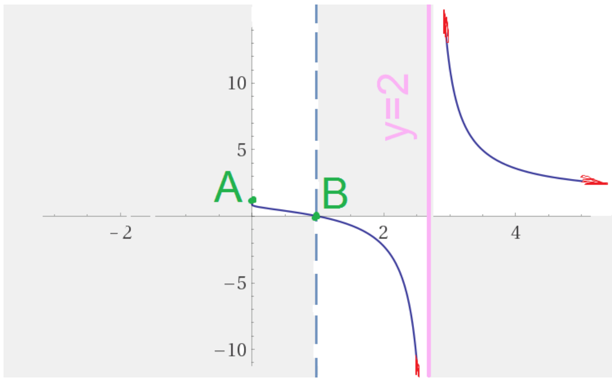
Studio della derivata seconda

$$f''(x) = -\frac{\ln x + 1}{x^2(\ln x - 1)^3}$$

La derivata seconda risulta positiva per $x < \frac{1}{e} \vee x > e$ e negativa sul resto del dominio



Si osserva che la funzione presenta un punto di flesso in corrispondenza di $x = \dfrac{1}{e}$



Da un osservazione più fine si può osservare che la derivata della funzione tende a $-\infty$ avvicinandosi a 0^+. Non si tratta comunque di un punto di non derivabilità in quanto $x=0$ non fa parte del dominio. Questa osservazione permette comunque di tracciare un dettaglio in più sul grafico.