Lezione 1 - esercizi
Topologia sull'asse dei reali

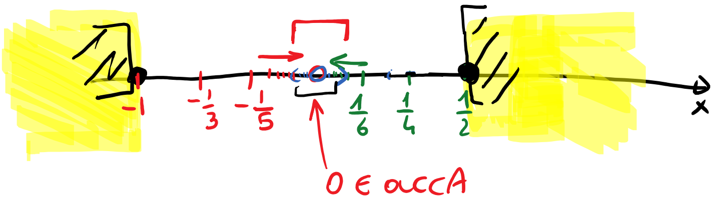
Discutere, nei seguenti casi, la limitatezza (inferiore e superiore) dei seguenti insiemi, nonché l'esistenza del minimo e del massimo. Determinarne, qualora esistano finiti, gli estremi inferiore e superiore.

Determinare i punti di accumulazione, isolati, interni e di frontiera.
In quali casi risultano chiusi o aperti?

$$A = \left\{ \frac{(-1)^n}{n};\ n \in \mathbf{N} \right\}$$

$$x = \frac{(-1)^n}{n} = \begin{cases} \frac{1}{n} & \text{se } n = 2, 4, 6, 8, \dots \\ -\frac{1}{n} & \text{se } n = 1, 3, 5, 7, \dots \end{cases}$$

n	1	2	3	4	5	6	7	8		$n \to \infty$
x	-1		$-\frac{1}{3}$		$-\frac{1}{5}$		$-\frac{1}{7}$			0
		$\frac{1}{2}$		$\frac{1}{4}$		$\frac{1}{6}$		$\frac{1}{8}$	$\dots$	0



$$\left.\begin{aligned} \max A &= \sup A = \frac{1}{2} \\ \min A &= \inf A = -1 \end{aligned}\right] \Rightarrow \underline{\text{LIMITATO}}$$

$accA = \{0\} \notin A \quad \Rightarrow \quad accA \not\subset A \Rightarrow$ A NON E' CHIUSO

$I(A) = A$

$\mathring{A} = \phi \quad \Rightarrow \quad \mathring{A} \neq A \quad \Rightarrow \quad A$ NON È APERTO

$\partial A = A \cup \{0\}$

$\bar{A} = A \cup accA = A \cup \{0\}$

b) $\left\{ \frac{n}{2n-5};\ n \in \mathbf{N} \right\} \cup \left[0, \frac{1}{2}\right]$

$$A = \left\{ x \in \mathbb{R} : \quad x = \frac{n}{2n-5},\ n \in \mathbb{N} \right\} \cup \left[0, \frac{1}{2}\right]$$

$x = \frac{n}{2n-5} \to \frac{1}{2}$

$2n-5 > 0 \quad \forall n \geq 3$

$n = 1 \qquad \frac{1}{2(1)-5} = -\frac{1}{3}$

$n = 2 \qquad \frac{2}{2\cdot 2-5} = -2$

$n = 3 \qquad \frac{3}{2\cdot 3-5} = 3$

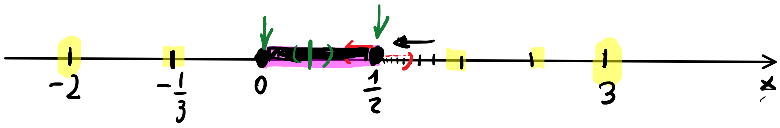
$n \geq 3$

$\frac{n}{2n-5} > \frac{1}{2}$

$2n-5 > 0$

$\cancel{2n} > \cancel{2n} - 5$

$0 > -5$



$\max A = \sup A = 3$

$\min A = \inf A = -2$

$\Rightarrow$ LIMITATO

$\mathrm{acc}\, A = [0, \frac{1}{2}] \subseteq A \Rightarrow A$ È CHIUSO

$I(A) = \left\{ \frac{n}{2n-5} , n \in \mathbb{N} \right\}$

$\mathring{A} = (0, \frac{1}{2})$

$\partial A = I(A) \cup \{0, \frac{1}{2}\}$

$\bar{A} = A$